Le Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers à Quatre Moments (4-MEDAF)

Emmanuel Jurczenko* Bertrand Maillet†

Décembre 2001 - Version préliminaire - Merci de ne pas référencer

Abstract

Cet article a pour objet de présenter la relation d'équilibre du MEDAF à quatre moments. Ce modèle introduit les moments centrés d'ordre trois et quatre. La version traditionnelle du MEDAF repose sur plusieurs hypothèses restrictives. En particulier, la validité du modèle suppose vérifiée la normalité des rendements boursiers et un risque dit "bénin ". En levant ces deux hypothèses, nous présentons la relation d'équilibre du MEDAF à quatre moments. En s'appuyant sur l'article fondateur de Rubinstein (1973) et ceux, plus récents, de Homaifar et Graddy (1988), Fang et Lai (1997), Hwang et Satchell (1999), Athayde et Flôres (1999) et (2000), et Bérenyi (2001-a), nous généralisons le modèle de Sharpe-Lintner-Mossin-Treynor afin de prendre en compte le caractère asymétrique et leptokurtique des distributions des rentabilités boursières. Nous utilisons un théorème de séparation monétaire pour établir la relation canonique du MEDAF à quatre moments. Une relation similaire est ensuite proposée dans le cas général où il existe N actifs risqués. Enfin, le lien entre les relations obtenues et celles déterminées dans le cadre d'autres modèles multifactoriels tel que le modèle de Black (1972), le MEDAF à trois moments de Krauss et Litzenberger (1976) et le MEA de Ross (1976), est étudié.

Mots clés : MEDAF, évaluation des actifs financiers, distribution des rentabilités boursières, coefficient asymétrie, indice d'applatissement.

Classification JEL : G.01.

*TEAM - ESA 8059 du CNRS - Université Paris 1 *Panthéon-Sorbonne*. E-mail: ejurczenko@aol.com. Correspondance à : E. Jurczenko, MSE-TEAM, 106-112 Bv de l'Hôpital 75647 Paris Cedex 13 FRANCE. Tél.: (33 1) 44 07 82 69/70 (*facsimile*).

†TEAM - ESA 8059 du CNRS - Université Paris 1 *Panthéon-Sorbonne,* ESCP-EAP et A.A.Advisors (ABN-AMRO Group). E-mail: bmaillet@univ-paris1.fr.

Le Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers à Quatre Moments (4-MEDAF)

1 Introduction

De nombreux tests empiriques remettent en cause la validité du modèle d'évaluat -ion des actifs financiers de Sharpe-Lintner-Mossin (MEDAF[1]). Ce modèle reste néanmoins une des contributions majeures de la finance moderne comme le souligne, par exemple, Black (1993) et Jagannathan et Wang (1996).

Cette modélisation de l'équilibre des marchés financiers repose sur plusieurs hypothèses restrictives. Deux de ces hypothèses fondamentales concernent la nature des préférences des agents et la normalité des distributions de rentabilité boursières. La première est nécessaire afin de légitimiser cette formalisation du problème de choix de l'investisseur dans une situation risquée alors que sous la seconde hypothèse, l'espérance d'utilité peut être exprimée comme une fonction exacte de l'espérance et de la variance des distributions de rentabilité.

Ces hypothèses font l'objet de deux critiques traditionnelles : l'une s'attache aux fondements théoriques de l'approche moyenne-variance ; l'autre repose sur leur inadéquations avec les faits stylisés mis en évidence dans les études empiriques. En effet, l'hypothèse de normalité des rentabilités suppose que l'investis -seur puisse perdre plus que sa richesse initiale et la fonction d'utilité quadratique ne correspond pas aux caractéristiques d'un agent réputé rationnel. Il est en particulier difficile d'accepter qu'un actif financier soit un bien "inférieur" (*Cf.* Pratt, 1964 et Arrow, 1970) et d'expliquer que des agents averses au risque participent à des lotteries risquées (*Cf.* Friedman et Savage, 1948, Kahneman et Tversky, 1979 et Golec et Tamarkin, 1998). D'ailleurs, l'approximation quadratique est souvent justifiée économiquement par l'existence d'un risque absolu "bénin" au sens de Samuelson (1970) ou par un risque relatif faible au sens de Tsiang (1972).

Ces hypothèses ne correspondent pas aux caractéristiques de tous les actifs, en particulier du fait de l'existence d'effets de levier. L'hypothèse de normalité des distributions de rentabilité[2] est de plus clairement rejetée dans la littérature empirique (*Cf.* par exemple Engle, 1982, Bollerslev, 1986, Mandelbrot, 1997). Les phénomènes d'asymétrie et de leptokurticité sont des caractéristiques avérées des distributions empiriques.

L'inadéquation de ces hypothèses traditionnelles a amené à rejeter purement et simplement l'existence d'une relation linéaire entre le risque systématique et la rentabilité d'un titre. Ces échecs relatifs du MEDAF traditionnel ont conduit plusieurs auteurs à adopter des approches alternatives afin d'améliorer la cohérence théorique et les performances empiriques du modèle. Parmi les principales voies empruntées, les extensions suivantes peuvent être distinguées (sans

[1] *Cf.* Sharpe (1964), Lintner (1965) et Mossin (1966).

[2] Ce qui peut être résolu par l'hypothèse de log-normalité. Néanmoins, cette distribution possède d'autres inconvénients (*Cf.*, par exemple, Feller, 1971).

aucune prétention à l'exhaustivité). Différentes lois de probabilités ont été substituées à la loi normale afin d'estimer les paramètres du MEDAF (*Cf.* Harvey and Zhou, 1993). Une version conditionnelle du MEDAF a été proposée afin de rendre compte du caractère autorégressif de la variance conditionnelle (*Cf.* Bollerslev *et alii*, 1988 ou Jagannathan et Wang, 1996) ou, plus généralement du caractère variable des paramètres. Des mesures de risques, différentes de la variance[3], ont permis à d'autres auteurs de développer des modèles d'évaluation d'actifs tels que le Gini-MEDAF (*Cf.* Okunev, 1990), des MEDAF à moments partiels (*Cf.* Nantel *et alii*, 1982 ou Pedersen et Satchell, 2001) et le VaR-MEDAF (*Cf.* Alexander et Baptista, 2000). Des modèles multifactoriels, basés sur un principe d'arbitrage ou sur des considérations heuristiques, conduisent à des améliorations du pouvoir explicatifs du modèle originel (*Cf.* Fama and French, 1992). Finalement, le dernier courant de la littérature que l'on mentionnera porte sur la prise en compte de moments d'ordre supérieurs à la variance dans la relation de valorisation des actifs (*Cf.*, par exemple, Rubinstein, 1973, Kraus et Litzenberger, 1976, Simaan, 1993, Fang et Lai, 1997, Hwang et Satchell, 1999, Harvey et Siddique, 2000-a and 2000-b, Kan et Wang, 2000 et Dittmar, 2001).

Dans cette dernière approche, l'asymétrie et la *kurtosis* de la distribution de rentabilité sont valorisés par les agents économiques[4]. Le succès mondial des marchés de produits dérivés, la gestion active de portefeuille et l'existence de stratégies à fort effet de levier utilisées par les *hedge funds* conduisent à des fonctions de gains convexes. Les écarts par rapport à l'hypothèse gaussienne ont déjà été considéré avec succès dans le cadre de l'évaluation des options (*Cf.* Jarrow et Rudd, 1982, Madan et Milne, 1994, Corrado et Su, 1996-a et 1996-b, Jurczenko *et alii*, 2002). L'asymétrie et la *kurtosis* des distributions permettent de comprendre la participation des agents averses au risque à des lotteries risquées (*Cf.* Prakash *et alii*, 1996, Golec et Tamarkin, 1998, Benishay, 1987 et 1992). Par ailleurs, le principe de responsabilité limitée associé à la détention d'actifs financiers et les problèmes d'agence induisent une asymétrie dans la rentabilité du portefeuille (*Cf.* Christie et Andrew, 1982 et Brennan, 1993). Comme le souligne Harvey et Siddique (2000-a), Dittmar (2001) et Barone-Adesi *et alii* (2001), l'asymétrie et la *kurtosis* permettent aussi de prendre en compte des variables utilisées dans des versions étendues de MEDAF, traduisant des effets sectoriels, des écarts de valorisation des entreprises constatées sur le marché, des effets de taille ou de *momentum*. Le phénomène d'hétéroscédasticité des séries de rendements et le fait que le taux de rentabilité mutli-périodique composé suit une loi asymétrique même si les densités des rentabilité-périodes sont symétriques (*Cf.* Fama, 1996) seraient à l'origine du caractère asymétrique et

[3] Pour une résumé complet des mesures de risques utilisées en finance, *Cf.* Pedersen et Satchell (1998).

[4] De nombreux travaux ont déja été consacré à l'étude de l'importance de l'asymétrie et la *kurtosis* pour l'évaluation des actifs financiers; *Cf.* notamment, Fama (1963), Mandelbrot (1963, 1997), Beedles et Simkowitz (1978, 1980), Aggarwal *et alii* (1989), Loretan et Phillips (1994), Mills (1995), Dacorogna *et alii* (1995), Tang (1996), Beckaert et *alii (1998),* Harvey et Siddique (1999), Jondeau et Rockinger (1999, 2000), Peiro (1999, 2000), Perez-Quiro et Timmerman (2001).

leptokurtique des densités inconditionnelles. Ces précédentes remarques condusisent à penser que les agents attachent de l'importance aux moments d'ordre trois et quatre quand il s'agit de valoriser les actifs financiers.

Pour rendre compte de l'influence de l'asymétrie de la distribution inconditionnelle des rentabilités sur la valorisation des actifs, Rubinstein (1973) et Krauss et Litzenberger (1976) ont proposés les premiers une extension du MEDAF classique (*Cf.* Jurczenko et Maillet, 2001). La caractéristique principale de ce type de modèles est basée sur le lien entre la rentabilité espérée et une prime d'asymétrie systématique. Ceci est prouvé grâce à l'utilisation d'un développement en série de Taylor d'ordre trois d'une fonction d'utilité von Neumann-Morgenstern et d'un théorème de séparation monétaire à deux fonds. Fang et Lai (1997) et Hwang et Satchell (1997) ont étendu cette approche afin d'incorporer l'effet de la *kurtosis* inconditionnelle dans la relation d'évaluation d'actifs, en utilisant un développement en série de Taylor d'ordre quatre de la fonction d'utilité de l'investisseur. Plus récemment, Harvey et Siddique (2000-a et 2000-b) et Dittmar (2001) ont étendu respectivement le MEDAF à trois et à quatre moments dans un cadre conditionnel.

L'objectif de ce papier est de proposer une théorie unifiée dans le cadre du modèle d'évaluation des actifs financiers à quatre moments, combinant certains des résultats de la théorie de l'espérance d'utilité, de la théorie du choix de portefeuille et de la théorie de l'évaluation des actifs. En effet, un cadre unifié est nécessaire afin d'obtenir une généralisation du MEDAF dans un monde asymétrique et leptokurtique, avec ou sans actif sans risque, en identifiant *a priori* les primes de risque. Lorsque l'on se concentre sur les fondements théoriques des choix rationnels, il est posssible de justifier un critère de décision moyenne-varaince-asymétrie-*kurtosis* (*Cf.* Benishay, 1987 et 1992) et d'expliquer un comportement risqué d'un agent averse au risque. Mais, à notre connaissance, aucune conclusion n'en a été tirée quant au choix optimal de portefeuille et aux relations d'évaluation des actifs. Lorsque l'on s'interesse maintenant aux choix de portefeuille, certains auteurs ont obtenu une relation de valorisation (*Cf.* Adcock et Shutes, 1999-a et 1999-b, Athayde et Flôres, 1999 et 2000) et il est alors possible de définir une frontière efficiente moyenne-variance-asymétrie-*kurtosis* (*Cf.* Athayde et Flôres, 2000). Néanmoins, une caractérisation explicite de la densité - ou un lien entre les moments - est nécéssaire pour identifier les préférences des agents, et par conséquent les primes de risque (*Cf.* Simaan, 1993 et Athayde et Flôres, 2000). Quand maintenant l'on s'interesse aux relations d'évaluation des actifs, ces problèmes peuvent être résolus, mais un théorème de séparation à deux fonds est alors nécessaire ; ceci implique une caractérisation linéaire des préférences et l'on doit supposer l'existence d'un actif sans risque (*Cf.* Rubinstein, 1976). Si les agents sont dotés d'une fonction d'utilité quartique (polynomiale d'ordre quatre), notre travail bénéficie des avantages de toutes ces approches et des hypothèses *minimales* sont alors requises en ce qui concerne les densités.[5] Nous adoptons pour cela une présentation matricielle

[5] L'approche adoptée ici requiert l'existence des quatre premiers moments centrés de la distribution de rentabilité. Une approche plus générale consiste à ne pas imposer cette contrainte

(Diacogiannis, 1994), avec ou sans un actif sans risque. Celle-ci conduit à une généralisation de la droite de marché des titres en un hyperplan de marché ; elle permet en outre d'identifier les primes et leurs signes. La rentabilité espérée d'un titre est alors une combinaison linéaire des rentabilités espérées de quatre portefeuilles particuliers : le portefeuille de marché, l'actif sans risque, et deux portefeuilles spécifiques[6]. Une fois caractérisées les propriétés de la frontière de variance minimale, il est possible d'établir le lien entre le MEDAF à quatre moments et le MEDAF de Black (1972), le modèle de marché cubique et le MEA de Ross (1976).

Cet article est organisé comme suit. La section 2 propose une revue des principales hypothèses relatives à la construction d'une relation d'évaluation à plusieurs moments, reposant sur des arguments d'équilibre partiel. Ensuite, dans la section 3, nous décrivons la relation d'équilibre dans un cadre unipériodique. En utilisant un théorème de séparation à deux fonds, nous obtenons alors une relation exacte d'évaluation des actifs financiers à quatre moments. Les propriétés de la frontière de variance minimale conduisent à établir la version du MEDAF à quatre moments quand il n'y a pas d'actif sans risque sur le marché et - si l'actif sans risque existe - au modèle de marché cubique. Une comparaison avec d'autres modèlès d'évaluation est enfin proposée. La Section 4 est consacrée à une conclusion provisoire.

2 Les préférences des investisseurs et le MEDAF à quatre moments

La définition d'un critère de décision en incertitude constitue un préalable à l'obtention d'une relation d'évaluation des actifs financiers à l'équilibre. Fondé sur un critère de choix de portefeuille moyenne-variance-asymétrie-*kurtosis*, le MEDAF à quatre moments suppose que tous les investisseurs rationnels déterminent la composition de leurs portefeuilles en ne tenant compte que des quatre premiers moments centrés de la distribution des rentabilités des actifs financiers. La justification théorique d'un tel critère de décision est cependant loin d'être évidente (*Cf.* Brockett et Kahane, 1992, Lhabitant, 1997 et Brockett et Garven, 1998). Les agents qui maximisent leur espérance d'utilité[7] n'ont pas, en général, des préférences qui peuvent s'exprimer comme une simple comparaison entre les m premiers moments centrés de la distribution du taux de rendement de leur investissement. Le critère d'utilité espérée utilise en effet toute l'information concernant la distribution de probabilité des rentabilités des actifs.

Sous certaines conditions néanmoins, la fonction d'espérance d'utilité peut

dans un cadre Levy stable (*Cf.* par exemple Rachev et Mittnik, 2000, pour une présentation des derniers développements de ce courant de la littérature).

[6] L'un de covariance avec le portefeuille de marché nulle, de cosasymétrie nulle et de *cokurtosis* unitaire ; l'autre de covariance nulle, de cosasymétrie unitaire et de *cokurtosis* nulle ; *Cf. infra.*

[7] Le critère d'espérance d'utilité reste le critère de choix traditionel pour les décisions d'agents rationnels dans un environnement risqué.

être reliée à tous les moments centrés de la distribution de rentabilité des actifs risqués. L'espérance d'utilité peut alors être exprimée comme une fonction croissante de l'espérance, décroissante de la variance, croissante de l'asymétrie et décroissante de la *kurtosis* du taux de rentabilité du portefeuille de l'investisseur. Dans ce cas, la solution du problème général de maximisation de l'espérance d'utilité de l'agent est identique à celle obtenue à partir d'un critère de choix de portefeuille moyenne-variance-asymétrie-*kurtosis*.

Les restrictions nécéssaires sont, pour l'essentiel, de deux ordres : il s'agit de restrictions portant sur la nature des préférences des agents, ou sur les caractéristiques des actifs risqués.

2.1 L'espérance d'utilité et les moments

On considère une économie d'échange monopériodique, avec un bien de consommation unique qui sert de numéraire. Chaque agent possède une dotation initiale W_0, arbitrairement fixée à 1 et une fonction d'utilité von Neumann-Morgenstern, $U\left(.\right)$, strictement croissante et concave, dont l'argument est la richesse terminale, notée W_F. La fonction d'utilité est définie de IR dans IR, et elle est supposée appartenir à la famille des fonctions d'utilité à aversion pour le risque standard (*Cf.* Kimball, 1993)[8], caractérisée par les propriétés suivantes :

$$U^{(1)}\left(.\right) \geq 0,\ U^{(2)}\left(.\right) \square\ 0,\ U^{(3)}\left(.\right) \geq 0,\ U^{(4)}\left(.\right) \square\ 0 \tag{1}$$

où $U^{(1)}\left(.\right)$, $U^{(2)}\left(.\right)$, $U^{(3)}\left(.\right)$ et $U^{(4)}\left(.\right)$ représentent les quatre premières dérivées partielles de $U\left(.\right)$.

Au début de la période, chaque agent maximise l'espérance d'utilité du taux de rentabilité de son investissement, noté R et définit tel que $R = W_F/W_0$.

Si la fonction d'utilité est continûment dérivable, il est possible d'exprimer la fonction d'utilité d'un investisseur comme un développement en série de Taylor autour de la valeur espérée de la variable aléatoire :

$$U\left(R\right) = \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}\left[E\left(R\right)\right]\left[R - E\left(R\right)\right]^n + R_n \tag{2}$$

où $E\left(R\right)$ est l'espérance du taux de rentabilité de l'investissement de l'agent, $U^{(n)}\left(.\right)$ est la dérivée *n-ième* de la fonction d'utilité et R_n est le reste du développement de Taylor d'ordre n.

---

[8] Kimball (1993) a montré qu'une aversion absolue pour le risque et une prudence absolue décroissantes par rapport à la richesse sont des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction d'utilité monotone croissante et concave appartienne à la classe des fonctions d'utilité à aversion pour le risque standard, *i.e.* :

$$\begin{cases} \frac{d\left(u^{(2)}/u^{(1)}\right)}{dW} = \left[-u^{(3)}u^{(1)} + \left(u^{(2)}\right)^2\right]\left(u^{(1)}\right)^{-2} < 0 \Longrightarrow U^{(3)} \geq 0 \text{ car } U^{(1)} \geq 0 \\ \frac{d\left(u^{(3)}/u^{(2)}\right)}{dW} = \left[-u^{(4)}u^{(2)} + \left(u^{(3)}\right)^2\right]\left(u^{(2)}\right)^{-2} < 0 \Longrightarrow U^{(4)} \square\ 0 \text{ car } U^{(2)} \square\ 0 \end{cases}$$

Si l'on suppose de plus, que la série de Taylor est convergente et que la distribution de rentabilité est déterminée uniquement par l'ensemble de ses moments, on obtient en prenant l'espérance mathématique de l'équation précédente :[9]

$$
\begin{aligned}
E\left[U(R)\right] &= U\left[E(R)\right] + \frac{1}{2}U^{(2)}\left[E(R)\right]\sigma^2(R) \\
&\quad + \frac{1}{3!}U^{(3)}\left[E(R)\right] m^3(R) + \frac{1}{4!}U^{(4)}\left[E(R)\right] \square^4(R) \\
&\quad + \sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{n!}U^{(n)}\left[E(R)\right] E\left[R - E(R)\right]^n
\end{aligned}
\tag{3}
$$

où $\sigma^2(R)$, $m^3(R)$, $\square^4(R)$ et $E\left[R - E(R)\right]^n$ sont respectivement, le deuxième, le troisième, le quatrième et le *n-ième* moment centré de la distribution de probabilité de la rentabilité perçue par l'investisseur.

2.2 Description de l'espérance d'utilité par les quatre premiers moments

La relation précédente indique que tout investisseur qui possède une fonction d'utilité appartenant à la classe des fonctions d'utilité à aversion pour le risque standard (Kimball, 1993), doit éprouver[10] une préférence pour l'espérance et

[9] La première condition suppose que les réalisations de la variable aléatoire doivent rester dans l'intervalle de convergence de la fonction d'utilité spécifiée. En particulier, concernant les fonctions logarithmiques et puissances, ceci implique (*Cf.* Tsiang, 1972, Loistl, 1976 et Lhabitant, 1997) :

$$0 \square R \square 2E(R)$$

En ce qui concerne la fonction d'utilité exponentielle, l'intervalle de convergence n'impose aucunes restrictions particulières sur le développement en série de Taylor.

La seconde condition implique, pour des variables aléatoires continues qui ne sont pas dénies sur un intervalle borné, que (*Cf.* Spanos, 2001, p.114) :

$$\int_{-1}^{+\infty}\frac{\ln f(R)}{(1+R)^2}dR = -\infty \qquad \text{(Condition de Krein)}$$

La fonction de distribution lognormale ne satisfait pas cette restriction. Il est en effet possible de montrer que la distribution :

$$f(R) = (2\pi)^{-1/2} R^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2}(\ln R)^2\right]\left[1 + a\sin(2\pi\ln R)\right]$$

pour $|a| < 1$, possède exactement les mêmes moments que la distribution lognormale obtenue pour $a = 0$ (*Cf.* Feller, 1971).

[10] L'hypothèse d'aversion pour le risque standard au sens de Kimball (1993) est une condition suffisante mais non nécessaire pour établir le sens des préférences des agents par rapport aux moments centrés de la distribution de rentabilité. Il est en effet également possible d'obtenir une alternance du signe des dérivées de la fonction d'utilité sous les hypothèses plus générales de non-satiété, d'aversion pour le risque et de cohérence dans les préférences des agents (*Cf.* Scott et Horvath, 1980).

l'asymétrie (positive) et une aversion pour la variance et la *kurtosis*[11]. Cependant, l'espérance d'utilité d'un tel agent dépend en règle général de tous les autres moments centrés de la distribution de rentabilité de son investissement, si bien que l'approche espérance-variance-asymétrie-*kurtosis* est nécessairement restrictive[12].

Une première justification théorique de la transformation du principe de maximisation de l'espérance d'utilité en un ordre de préférence sur les moments repose sur une spécification particulière de la densité des rentabilités des actifs. Dans ce cas, plusieurs hypothèses ont été proposées depuis l'hypothèse gaussienne de Markowitz (1952). Sans aucune prétention d'exhaustivité, on peut souligner le choix d'une distribution non-sphérique (*Cf.* Simaan, 1993), une *Skew*-Normale multivariée (*Cf.* Adcock et Shutes, 1999-a), une densité Levy-Pareto stable (*Cf.* Rachev et Mitnik, 2000), une densité de Student multivariée (*Cf.* Adcock et Shutes, 1999-b), une Student généralisée asymétrique (*Cf.* Theodossiou, 1998) et une loi Pearson type IV (*Cf.* Bera et Premaratne, 2000). Mais si la loi normale est parfaitement définie par ses deux premiers moments, ceci n'est pas général. De plus, comme le montrent Brockett et Kahane (1992), Simaan (1993), et plus récemment Brockett et Garven (1998), l'interprétation des coefficients de la fonction d'espérance d'utilité à l'asymétrie, à la kurtosis et aux moments d'ordre supérieurs, comme des sensibilités, dépend d'une condition sur l'orthogonalité des moments. En effet, si les moments ne sont pas orthogonaux, l'effet total de l'augmentation de l'un sera indéterminé. De plus, même si la fonction de densité peut être en conformité avec les faits stylisés mis en évidence dans la littétature empirique, d'autre restrictions supplémentaires sur les fonctions d'utilités sont nécessaires afin d'obtenir un ordre de préférence cohérent au sens de Scott et Horvath (1980).

Une seconde justification pour transformer le principe de maximisation de l'espérance d'utilité en un ordre de préférence sur les moments de la distribution de rentabilité, consiste à travailler avec des fonctions d'utilités particulières. Par exemple, une fonction d'utilité quartique peut être considérée, puisqu'elle dépend uniquement des quatre premiers moments de la distribution des rendements. Celle-ci peut être définie comme suit (*Cf.* Benishay, 1987, 1989 et

[11] Lorsque l'on différencie l'équation (3) par rapport à $E(R)$, $\sigma^2(R)$, $m^3(R)$ et $\square^4(R)$, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial E[U(R)]}{\partial E(R)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{U^{(n+1)}[E(R)]\, E[R-E(R)]^n}{n!} = U^{(1)}[E(R)] > 0 \\ \frac{\partial E[U(R)]}{\partial \sigma^2(R)} = (2!)^{-1}\, U^{(2)}[E(R)] < 0 \\ \frac{\partial E[U(R)]}{\partial m^3(R)} = (3!)^{-1}\, U^{(3)}[E(R)] > 0 \\ \frac{\partial E[U(R)]}{\partial \square^4(R)} = (4!)^{-1}\, U^{(4)}[E(R)] < 0 \end{cases}$$

[12] Le critère de décision espérance-variance souffre du même défaut.

1992)[13] :

$$U(R) = a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + a_3 R^3 + a_4 R^4 \tag{4}$$

avec $a_i \in IR, i = [0, \ldots, 4]$

Dans ce cas, toutes les dérivées partielles d'ordre supérieur à quatre s'annulent et le dernier terme de la relation (3) est nul. Par conséquent :

$$E[U(R)] = a_0 + a_1 E(R) + a_2 E\left(R^2\right) + a_3 E\left(R^3\right) + a_4 E\left(R^4\right) \tag{5}$$

En utilisant les résultats bien connus suivants (*Cf.* Kendall, 1974, p. 58) :

$$\begin{cases} E\left(R^2\right) = \sigma^2(R) + E(R)^2 \\ E\left(R^3\right) = m^3(R) + 3\,E(R)\;\sigma^2(R) \\ E\left(R^4\right) = \square^4(R) + 4\,E(R)\;m^3(R) + 6\,E(R)^2\;\sigma^2(R) + E(R)^4 \end{cases}$$

l'on obtient :

$$\begin{aligned} E[U(R)] \;=\;& a_0 + a_1 E(R) + a_2 E(R)^2 + a_3 E(R)^3 + a_4 E(R)^4 \\ & + \left[a_2 + 3\,a_3 E(R) + 6\,a_4 E(R)^2\right] \sigma^2(R) \\ & + \left[a_3 + 4\,a_4 E(R)\right] m^3(R) + a_4\;\square^4(R) \end{aligned} \tag{6}$$

Dès que l'espérance, la variance, l'asymétrie et la *kurtosis* sont finis, il est ainsi possible d'exprimer les préférences des agents comme une fonction qui ne dépend que des quatre premiers moments centrés de la distribution de probabilité du taux de rentabilité R. On vérifie que pour toute fonction d'utilité quartique[14] qui possède les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \begin{cases} a_1 > 0 \\ \frac{-3a_3+K+\left(9a_3^2-24a_3a_4\right)K^{-1}}{12a_4} < R \end{cases} & \text{(strictement croissante, } i.e. \text{ gourmandise)} \\ a_2 < \left(\frac{3\,a_3^2}{8\,a_4}\right) & \text{(concave, } i.e. \text{ aversion pour le risque)} \\ \begin{cases} a_3 > 0 \\ -\left(\frac{3\,a_3}{4\,a_4}\right) > R \end{cases} & \text{(utilité marginale décroissante, } i.e. \text{ prudence)} \\ a_4 < 0 & \text{(dérivée seconde concave, } i.e. \text{ tempérance)} \end{cases} \tag{7}$$

[13] Puisque une fonction d'utilité von Neumann-Morgenstern est définie uniquement à une transformation affine positive près, il est toujours possible de donner une expression plus simple et parfaitement équivalente de la fonction d'utilité quartique. En soustrayant a_0 à l'équation (4) et divisant par a_1, on obtiens :

$$U(R) = R + bR^2 + c\,R^3 + d\,R^4$$

où $b = a_2\;/a_1$, $c = a_3\;/a_1$ et $d = a_4\;/a_1$.

[14] Pour étude des propriétés de la fonction d'utilité cubique, *Cf.* Levy, 1969, Rossi et Tilibetti, 1996 et Gamba et Rossi, 1998-a et 1998-b.

avec :

$$K = \left(\frac{A + \sqrt{4\left(-9a_3^2 + 24a_3a_4\right)^3 + A^2}}{2} \right)^{1/3}$$

et :

$$A = 54\,a_3^3 + 216\,a_2\,a_3\,a_4 - 432\,a_4^2\,a_1$$

les agents manisfestent une préférence pour l'espérance et l'asymétrie (positive) et de l'aversion pour la variance et la *kurtosis* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E[U(R)]}{\partial\, E(R)} = a_1 + 2a_2 E\,(R) + 3\,a_3\,E\left(R^2\right) + 4\,a_4\,E\left(R^3\right) > 0 \\ \frac{\partial E[U(R)]}{\partial\, \sigma^2(R)} = a_2\, + 3\,a_3\,E\,(R) + 6\,a_4\,\left[E\left(R^2\right) + \sigma^2\,(R)\right] < 0 \\ \frac{\partial E[U(R)]}{\partial\, m^3(R)} = a_3 + a_4\,E\,(R) > 0 \\ \frac{\partial E[U(R)]}{\partial\, \square^4(R)} = 24\,a_4 < 0 \end{array} \right. \tag{8}$$

Néanmoins la monotonicité et la concavité pré-supposées de (4) conduisent à certaines restrictions sur les réalisations des variables aléatoires. En effet quand on restreint les préférences des agents à une fonction d'utilité polynomiale d'ordre 4, pour s'assurer de la croissance stricte et de la concavité de la fonction d'utilité, on doit s'assurer que les réalisations des rentabilités des actifs sont dans l'intervalle sur lequel ces fonctions sont strictement croissantes et concaves. En d'autres termes, le rendement *ex post* doit respecter l'inégalité suivante :

$$\frac{-3a_3 + K + \left(9a_3^2 - 24a_3a_4\right)K^{-1}}{12a_4} < R < -\left(\frac{3\,a_3}{4\,a_4}\right) \tag{9}$$

De plus, comme les coefficients d'aversion absolue pour le risque et de prudence absolue sont décroissants si et seulement si les discriminants Δ et $\Delta^{'}$ sont négatifs, où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = \left[-\frac{\partial U(R)}{\partial R}\frac{\partial^3 U(R)}{\partial\, R^3} + \left(\frac{\partial^2 U(R)}{\partial\, R}\right)^2 \right] \\ \Delta^{'} = \left[-\frac{\partial^2 U(R)}{\partial R}\frac{\partial^4 U(R)}{\partial\, R^3} + \left(\frac{\partial^3 U(R)}{\partial\, R}\right)^2 \right] \end{array} \right.$$

le rendement *ex post* doit également vérifier le second système d'inégalités :

$$\left\{ \begin{array}{l} 24\,\left(a_4\right)^2 R^4 + 24\,a_3\,a_4\,R^4 + 9\,\left(a_3\right)^2\, R^2 + 6\,\left(a_2\,a_3 \right. \\ \qquad \left. -2\,a_1\,a_4\right)\, R < 3\,a_1\,a_3 + 2\,\left(a_2\right)^2 \\ \frac{-3\,a_3 + \sqrt{24\,a_2\,a_4 - 9\,(a_3)^2}}{12\,a_4} < R < \frac{-3\,a_3 + \sqrt{24\,a_2\,a_4 - 9\,(a_3)^2}}{12\,a_4} \end{array} \right. \tag{10}$$

Ces restrictions constituent des limites bien connues de l'utilisation d'une fonction polynômiale d'ordre quatre pour représenter les préférences des agents.

On peut remarquer cependant que, contrairement à la fonction d'utilité quadratique, la fonction d'utilité quartique peut toujours, grâce à un choix judicieux de ces coefficients et du support de la distribution de rentabilités, rendre compte de n'importe quelle attitude face au risque (*i.e.* prudence et tempérance au sens de Kimball, 1990 et 1993, aversion absolue pour le risque et prudence absolue décroissantes par rapport à la richesse).

2.3 Approximation de l'espérance d'utilité par les quatre premiers moments

Une approche alternative consiste à rechercher les conditions sous lesquelles l'analyse moyenne-variance-asymétrie-*kurtosis* peut constituer une approximation satisfaisante du critère d'utilité espérée. Initiallement développée par Samuelson (1970) et Tsiang (1972) pour justifier économiquement l'analyse moyenne-variance, ces conditions sont au nombre de deux.

La première condition consiste à admettre que le risque absolu supporté par les investisseurs est "petit" (*i.e.* que les distributions de rentabilités sont compactes) et que l'intervalle de négociation est arbitrairement petit et fini. Sous ces hypothèses, Samuelson (1970) a montré que l'analyse moyenne-variance-asymétrie-*kurtosis* produit une approximation asymptotiquement correcte de l'espérance d'utilité et qui converge plus rapidemment vers le critère d'utilité espérée que l'approximation quadratique.

Le seconde approche revient à supposer que le risque relatif, mesuré par le rapport de l'écart-type sur l'espérance de rentabilité, est si important que l'on ne peut le négliger. Dans ce cas, Tsiang (1972) a montré que pour la plupart des fonctions d'utilité utilisées en finance, il est toujours possible de trouver un intervalle, sur lequel le risque relatif est défini, pour lequel la prise en compte des quatre premiers moments centrés constitue une approximation locale satisfaisante du critère d'utilité espérée. Cette dernière approche est cependant moins satisfaisante puisqu'elle ne fournit pas *a priori* les limites de validité de l'analyse moyenne-variance-asymétrie-*kurtosis*. Cependant quelle que soit la justification théorique retenue, la qualité de l'approximation à l'ordre quatre du critère d'utilité espérée doit être évaluée.

De nombreux auteurs (tels que Levy and Markowitz,1979, Kroll *et alii* , 1984, Pulley, 1981, 1985, Tew et Reid, 1986, Markowitz, 1991, Kallberg et Ziemba, 1993, Simaan, 1997, Fung et Hsieh, 1999 et Amilon, 2000) montrent que l'approche moyenne-variance est satisfaisante, et que les portefeuilles moyenne-variance efficients sont proches des portefeuilles obtenus directement par la maximisation de l'espérance d'une fonction d'utilité (dans le cas d'une fonction logarithmique par exemple). Néanmoins, Ederington (1995) montre que, par rapport à une approximation quadratique, un développement limité à l'ordre quatre peut améliorer significativement la qualité de l'approximation de l'espérance d'utilité, sans jamais l'altérer et ce quelle que soit la fonction d'utilité considérée.

Ainsi l'introduction des moment centrés d'ordre trois et quatre dans un critère de décision est théoriquement justifiable lorsque la fonction d'utilité de l'investisseur est une fonction d'utilité quartique et que le support des distributions de rentabilités est convenablement restreint (*Cf.* Benishay, 1987 et 1992) ou lorsque la distribution de rentabilité est compacte et que l'intervalle de temps entre les actions et leurs conséquence est petit mais fini (*Cf.* Samuelson, 1970). Sous ces conditions, il est possible d'obtenir des relations d'équilibre exactes qui nous renseignent sur le processus générateur des rentabilités des titres. La prise en compte des quatre premiers moments centrés de la distribution de rentabilité des actifs permet de généraliser l'approche moyenne-variance dans le cadre du MEDAF à quatre moments. Ce modèle est développé dans les sections suivantes

3 Le modèle d'évaluation des actifs financiers à quatre moments

Initialement développé par Rubinstein (1973), le MEDAF à quatre moments implique que les prix d'équilibre des actifs financiers sont, en présence de distributions de rentabilités asymétriques et leptokurtiques, une fonction linéaire de trois paramètres. Le premier paramètre, dénommé β, caractérise la sensibilité de la rentabilité des titres aux variations du portefeuille de marché. Le deuxième paramètre, noté γ, dépend de la coasymétrie relative des rentabilités des actifs avec les rendements du portefeuille de marché. Le troisième et dernier paramètre, dénommé δ, représente quant à lui la *cokurtosis* relative des rentabilités des titres avec les rentabilités du portefeuille de marché.

Nous présentons deux versions de ce modèle dans les sous-sections suivantes. La première correspond à la version traditionnelle de Rubinstein (1973) ; la seconde s'appuie sur la théorie du choix de portefeuille de Markowitz (1952).

Dans le cadre de la première approche (sous-section 3.1.), les conditions d'équilibre individuelles sont obtenues par maximisation d'une fonction d'utilité indirecte. Une fois l'équilibre atteint, l'utilisation d'un théorème de séparation monétaire à deux fonds permet d'obtenir une relation d'équilibre des marchés financiers, appellée relation fondamentale du MEDAF à quatre moments. Celle-ci nécessite néanmoins de supposer l'existence d'un actif sans risque.

Dans le cadre de la seconde approche (sous-section 3.2.), il s'agit d'exploiter les propriétés de la frontière d'efficience moyenne-variance-asymétrie-*kurtosis*. Sous certaines conditions, l'on peut généraliser la relation fondamentale du MEDAF à quatre moments dans le cas où il n'existe pas d'actif sans risque.

Le lien avec d'autres modèles multifactoriels - tel que le modèle de Black (1972), le MEA[15] de Ross (1976) où le modèle cubique de marché - est alors possible (sous-section 3.3.).

[15] Pour modèle d'évaluation par arbitrage.

3.1 Agrégation des conditions d'équilibre individuelles et théorème de séparation monétaire à deux fonds

Après avoir rappelé les principales hypothèses du modèle, nous présentons la relation d'équilibre obtenue à l'aide d'un théorème de séparation monétaire à deux fonds, suivant en cela l'approche de Rubinstein (1973). Cette relation d'équilibre est la relation fondamentale du MEDAF à quatre moments.

3.1.1 Notations et Hypothèses

Les hypothèses suivantes sont postulées. Il existe N actifs risqués (avec $N \geq 4$) et un actif sans risque. Soit : $\mathbf{R}$ le vecteur de dimension $(N \times 1)$ des rentabilités des actifs risqués, R_f le taux de rentabilité de l'actif sans risque, $\mathbf{E}$ le vecteur de dimension $(N \times 1)$ des rentabilités espérées des actifs risqués et la matrice régulière de variance-covariance des rentabilités des titres de dimension $(N \times N)$. Le marché des capitaux est supposé être "pur et parfait". Tous les investisseurs sont dotés de fonctions d'utilités strictement croissantes et concaves, à aversion standard pour le risque (Kimball, 1993). Les agents forment de plus des anticipations homogènes concernant les distributions de rentabilités des titres. Chaque investisseur maximise son espérance d'utilité qui peut être représentée par une fonction d'utilité (indirecte), notée $V(.)$, respectivement croissante et concave avec l'espérance et l'asymétrie de la distribution de rentabilité de son portefeuille et décroissante et concave avec la variance et la *kurtosis*[16].

La fonction d'espérance d'utilité peut s'écrire comme :

$$E\left[U\left(R_p\right)\right] = V\left[E\left(R_p\right), \sigma^2\left(R_p\right), m^3\left(R_p\right), \square^4\left(R_p\right)\right] \tag{11}$$

avec :

$$V_1 = \frac{\partial V(.)}{\partial E\left(R_p\right)} \geq 0,\ V_2 = \frac{\partial V(.)}{\partial \sigma^2\left(R_p\right)} \ \square\ 0,\ V_3 = \frac{\partial V(.)}{\partial m^3\left(R_p\right)} \geq 0 \text{ et } V_4 = \frac{\partial V(.)}{\partial \square^4\left(R_p\right)} \ \square\ 0.$$

où $R_p = W_F/W_0$ est la rentabilité espérée du portefeuille choisi par l'agent, et W_0 et W_F sont, respectivement, la richesse initiale et terminale de l'investisseur.

On considère un agent qui investit w_{p_i} de sa richesse dans le *i-ième* actif risqué, $i = [1, \ldots, N]$, et w_{p_0}dans l'actif sans risque. L'espérance, la variance, l'asymétrie et la *kurtosis* de la distribution de rentabilité de son portefeuille sont

[16] Nous appellons ici abusivement le moment d'ordre trois asymétrie et le moment d'ordre quatre *kurtosis*. Ces derniers correspondent normalement aux moments centrés d'ordre trois et quatre standardisés.

respectivement[17] :

$$\left\{\begin{array}{l} E\left(R_p\right) = w_{p_0}\, R_f + \mathbf{w}_p^{'}\, \mathbf{E} \\ \sigma^2\left(R_p\right) = \mathbf{w}_p^{'} \quad \mathbf{w}_p \\ m^3\left(R_p\right) = \mathbf{w}_p^{'}\, \Sigma_p \\ \square^4\left(R_p\right) = \mathbf{w}_p^{'}\, \Gamma_p \end{array}\right. \tag{12}$$

où $\mathbf{w}_p$ est le vecteur de dimension $(N \times 1)$ des proportions des titres risqués détenues par l'investisseur ; est la matrice de variance-covariance des rendements des N titres, de dimension $(N \times N)$; Σ_p est le vecteur dimension $(N \times 1)$ des coasymétries des rentabilités des titres avec la rentabilité du portefeuille p et Γ_p est le vecteur de dimension $(N \times 1)$ de *cokurtosis* des rentabilités des titres avec la rentabilité du portefeuille p. Chacunes des composantes des vecteurs de coasymétrie et de *cokurtosis* sont, respectivement, définies telles que :

$$\left\{\begin{array}{l} Cos\left(R_i, R_p\right) = E\left\{\left[R_i - E\left(R_i\right)\right]\left[R_p - E\left(R_p\right)\right]^2\right\} \\ Cok\left(R_i, R_p\right) = E\left\{\left[R_i - E\left(R_i\right)\right]\left[R_p - E\left(R_p\right)\right]^3\right\} \end{array}\right. \tag{13}$$

En faisant apparaître dans les opérateurs de coasymétrie et de *cokurtosis* la variance et l'asymétrie du portefeuille p, *i.e* :

$$\left\{\begin{array}{l} Cos\left(R_i, R_p\right) = E\left\{\left[R_i - E\left(R_i\right)\right]\left[\left[R_p - E\left(R_p\right)\right]^2 - \sigma^2\left(R_p\right)\right]\right\} \\ Cok\left(R_i, R_p\right) = E\left\{\left[R_i - E\left(R_i\right)\right]\left[\left[R_p - E\left(R_p\right)\right]^3 - m^3\left(R_p\right)\right]\right\} \end{array}\right. \tag{14}$$

les composantes des vecteurs Σ_p et Γ_p peuvent ainsi s'interprèter comme les covariances des rentabilités d'un actif i avec respectivement la volatilité instantanée et l'asymétrie instantanée du portefeuille p considéré.[18]

On suppose également que la distribution du taux de rentabilité du portefeuille de marché est asymétrique et leptokutrtique et que le vecteur des rentabilités espérées des actifs risqués peut être exprimé comme une combinaison linéaire du vecteur unitaire, du vecteur de coasymétrie et du vecteur de *cokurtosis* des rentabilités des N actifs risqués avec la rentabilité du portefeuille p.

3.1.2 Equilibre partiel des marchés financiers

Dans ce cadre, le problème de décision de portefeuille de l'agent peut se ramener à la résolution du programme d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{w}_p^{'}}{Max}\left\{E\left[U\left(R_p\right)\right]\right\} &= \underset{\mathbf{w}_p^{'}}{Max}\left\{V\left[E\left(R_p\right), \sigma^2\left(R_p\right), m^3\left(R_p\right), \square^4\left(R_p\right)\right]\right\} \\ s.c. \quad &: \quad \mathbf{w}_p^{'}\mathbf{1} = \mathbf{1} - w_{p_0} \end{aligned} \tag{15}$$

[17] *Cf.* Diacogiannis (1994), et l'annexe 1 pour l'expression matricielle de l'asymétrie et de la *kurtosis* de la rentabilité d'un portefeuille p.

[18] Suivant Racine (1998), la coasymétrie et la co*kurtosis* de la rentabilité d'un actif avec les rentabilités d'un portefeuille traduisent respectivement la capacité du titre à couvrir les chocs sur la variance et sur l'asymétrie du portefeuille (*i.e.* les mouvements non anticipés de la volatilité et de l'asymétrie).

où $\mathbf{1}$ est le vecteur unitaire de dimension $(N \times 1)$.

Les conditions de premier ordre pour un *maximum* sont :[19]

$$\frac{\partial V(.)}{\partial \mathbf{w}_p'} = (V_1)(\mathbf{E} - R_f\,\mathbf{1}) + (2\,V_2) \quad \mathbf{w}_p + (3\,V_3)\ \Sigma_p + (4\,V_4)\ \Gamma_p \tag{16}$$

Pour passer des conditions d'équilibre des investisseurs individuels à l'équilibre de marché, il est nécessaire d'introduire un théorème de séparation monétaire à deux fonds. Si les anticipations des agents sont homogènes, une condition nécessaire et suffisante pour obtenir une séparation monétaire à deux fonds est que tous les agents possèdent une fonction d'utilité à tolérance absolue pour le risque, qui soit linéaire en la richesse, et dont le coefficient devant la rentabilité du portefeuille est identique quel que soit l'agent (*Cf.* Cass and Stiglitz, 1970, pp. 145-147). Dans ce cas, la composition *optimale* du portefeuille risqué de l'investisseur est la même que celle du portefeuille de marché

L'agrégation des conditions d'équilibre individuelles et l'utilisation d'un théorème de séparation monétaire à deux fonds permettent d'obtenir la relation d'équilibre suivante :

$$\mathbf{E} - R_f\mathbf{1} = \theta_2\,\sigma^2(R_m)\ \boldsymbol{\beta} + \theta_3\ m^3(R_m)\ \boldsymbol{\gamma} + \theta_4\,\square^4(R_m)\ \boldsymbol{\delta} \tag{17}$$

où : $\theta_2 = -2V_2/V_1$, $\theta_3 = -3V_3/V_1$ et $\theta_4 = -4V_4/V_1$ représentent, respectivement, une mesure de l'aversion de l'agent pour la variance, une mesure de sa préférence pour l'asymétrie et une mesure de son aversion pour la *kurtosis* de la distribution de rentabilité ; $\sigma^2(R_m)$, $m^3(R_m)$, $\square^4(R_m)$ et $\mathbf{w}_m$ sont respectivement l'espérance, la variance, l'asymétrie, la *kurtosis* et le vecteur de dimension $(N \times 1)$ des poids correspondants au portefeuille de marché ; $\boldsymbol{\beta} = \quad \mathbf{w_m}/\sigma^2(R_m)$, $\boldsymbol{\gamma} = \Sigma_m/m^3(R_m)$, $\boldsymbol{\delta} = \Gamma_m/\square^4(R_m)$ sont respectivement le vecteur de covariance relative de dimension $(N \times 1)$, le vecteur de coasymétrie relative de dimension $(N \times 1)$ et le vecteur de *cokurtosis* des rentabilités des N actifs risqués avec la rentabilité du portefeuille de marché.

Un changement de notations nous permet d'obtenir le théorème suivant.

Théorème 1. *La relation du MEDAF à quatre moments peut s'écrire comme :*

$$\mathbf{E} - R_f\ \mathbf{1} = b_1\,\boldsymbol{\beta} + b_2\,\boldsymbol{\gamma} + b_3\,\boldsymbol{\delta} \tag{18}$$

où $b_1 = \theta_2\,\sigma^2(R_m)$, $b_2 = \theta_3\ m^3(R_m)$ *et* $b_3 = \theta_4\ \square^4(R_m)$.

Démonstration : *Cf. discussion précédente.*

Ainsi, pour tout titre i, $i = [1, \ldots, N]$:

$$E(R_i) - R_f = b_1\,\beta_i + b_2\,\gamma_i + b_3\,\delta_i \tag{19}$$

[19] Les dérivées partielles de la fonction d'espérance d'utilité par rapport à $\mathbf{w}_p$ constituentsuffisent à établir des conditions nécessaires et suffisantes pour un *maximum* puisque la matrice hessienne de la fonction objectif de l'investisseur est définie négative (*Cf.*, par exemple, Athayde et Flôres, 1999, et l'annexe 2). On peut montrer aussi que les dérivées partielles de l'asymétrie et de la *kurtosis* de la rentabilité du portefeuille par rapport à $\mathbf{w}_p$ sont, respectivement, égales à $3\,\Sigma_p$ et à $4\,\Gamma_p$ (*Cf.*, Diacogiannis, 1994 et l'annexe 3).

où : $\beta_i = Cov\,(R_i, R_m)\,/\sigma^2\,(R_m)$ est la *i-ème* composante, avec $i = [1, ..., N]$, du vecteur $\boldsymbol{\beta}$ de dimension $(N \times 1)$, $\gamma_i = Cos\,(R_i, R_m)\,/m^3\,(R_m)$ est la *i-ème* composante, avec $i = [1, ..., N]$, du vecteur $\boldsymbol{\gamma}$ de dimension $(N \times 1)$ et $\delta_i = Cok\,(R_i, R_m)\,/\square^4\,(R_m)$ est la *i-ème* composante, avec $i = [1, ..., N]$, du vecteur $\boldsymbol{\delta}$, de dimension $(N \times 1)$.

Cette relation est similaire[20] à la relation d'évaluation à quatre moments développée par Hwang et Satchell (1999) et Christie et Chaudrhy (2001). Elle indique qu'à l'équilibre, en présence de distributions de rentabilité asymétriques et leptokurtiques, la rentabilité excédentaire d'un titre est une fonction linéaire[21] des paramètres β_i, γ_i et δ_i. Ces paramètres fournissent des mesures de la contribution marginale d'un actif respectivement à la variance, à l'asymétrie et à la *kurtosis* de la distribution de rentabilité du portefeuille de marché. Les coefficients b_1, b_2 et b_3 peuvent quant à eux s'interpréter comme des primes de risques de marché. Les investisseurs sont supposés averses au risque, prudents et tempérants au sens de Kimball (1990 et 1993), ce qui implique que b_1 est positif puisque $\theta_2 \geq 0$, que b_2 est du signe opposé à $m^3\,(R_m)$ puisque $\theta_3 \square 0$ et que b_3 est positif puisque $\theta_4 \geq 0$. Les investisseurs sont ainsi, à l'équilibre, récompensés en terme d'espérance de rentabilité excédentaire pour les risques relatifs qu'ils supportent, mesurés par les coefficients β_i, γ_i et δ_i correspondant à l'actif i.

Lorsque la fonction d'utilité de l'agent est indépendante de la *kurtosis* (*i.e.* $b_3 = 0$), l'équation (18) se ramène à la relation du MEDAF à trois moments initialement développée par Krauss et Litzenberger (1976), soit :

$$\mathbf{E} - R_f\,\mathbf{1} = b_1\,\boldsymbol{\beta} + b_2\,\boldsymbol{\gamma} \tag{20}$$

Si l'investisseur est aussi indifférent à l'asymétrie (*i.e.* $b_2 = b_3 = 0$), l'équation (18) se confond avec la relation traditionnelle du MEDAF, soit :

$$\mathbf{E} - R_f\,\mathbf{1} = b_1\;\boldsymbol{\beta} \tag{21}$$

---

[20] La seule différence porte sur la définition des coéfficients b_1 et b_2. Hwang et Satchell (1999) et Christie et Chaudrhy (2001) ont considéré une fonction d'utilité indirecte qui ne dépent pas des quatre premiers moments centrés mais de la moyenne, de l'écart-type, de la racine cubique de l'asymétrie et de la racine quatrième de la *kurtosis* du taux de rentabilité du portefeuille de l'investisseur. Ceci est sans conséquence pour les développements qui suivent.

[21] Si la distribution de rentabilité du portefeuille de marché n'est pas asymétrique et leptokurtique, la relation du MEDAF à quatre moments devient :

$$\mathbf{E} - R_f\,\mathbf{1} = \theta_2 \quad \mathbf{w_m} + \theta_3\ \Sigma_m + \theta_4\,\Gamma_m$$

où θ_2, θ_3 et θ_4 sont définis comme précédemment et $\mathbf{w_m}$, Σ_m et Γ_m sont resppectivement les vecteurs, de dimension $(N \times 1)$, de covariance, de coasymétrie et de *cokurtosis* des rentabilités de chaque actif avec le rendement du portefeuille de marché.

Ainsi, pour tout titre i, $i = [1, \ldots, N]$:

$$\begin{aligned} E\,(R_i) - R_f &= \theta_{2i}\ Cov\,(R_i, R_m) + \theta_{3i}\ Cos\,(R_i, R_m) \\ &\quad + \theta_{4i}\ Cok\,(R_i, R_m) \end{aligned}$$

Suivant Sears et Wei (1985, 1988), il est possible de donner une implication théorique pour le MEDAF à quatre moments qui conduit à une interprétation alternative des coefficients b_1, b_2 et b_3. Puisque la relation du MEDAF à quatre moments est valide pour toutes les rentabilités des titres, elle est nécessairement vérifiée pour le rendement du portefeuille de marché. Soit :

$$E(R_m) - R_f = b_1 + b_2 + b_3 \tag{22}$$

En divisant cette équation par l'équation (18) on obtient le corollaire suivant
.

Corollaire 1. *La relation du MEDAF à quatre moments peut aussi s'écrire comme :*[22]

$$\mathbf{E} - R_f\,\mathbf{1} = (\,\alpha_1\,\boldsymbol{\beta} + \alpha_2\,\boldsymbol{\gamma} + \alpha_3\,\boldsymbol{\delta})\,[E(R_m) - R_f] \tag{23}$$

avec :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{2}{2+3\,\eta_1+4\eta_2} \\ \alpha_2 = \frac{3\,\eta_1}{2+3\,\eta_1+4\eta_2} \\ \alpha_3 = \frac{4\,\eta_2}{2+3\,\eta_1+4\eta_2} \\ \eta_1 = \frac{2}{3} \times \frac{b_2}{b_1} = \frac{\partial\,E(R_m)}{\partial\,m^3(R_m)} \times \left[\frac{\partial E(R_m)}{\partial\,\sigma^2(R_m)}\right]^{-1} \times \frac{m^3(R_m)}{\sigma^2(R_m)} \\ \eta_2 = \frac{1}{2} \times \frac{b_3}{b_1} = \frac{\partial\,E(R_m)}{\partial\,\square^4(R_m)} \times \left[\frac{\partial\,E(R_m)}{\partial\,\sigma^2(R_m)}\right]^{-1} \times \frac{\square^4(R_m)}{\sigma^2(R_m)} \end{cases}$$

Démonstration : *Cf. discussion précédente.*
Ainsi, pour tout titre i, $i = [1, \ldots, N]$:

$$E(R_i) - R_f \;=\; [\alpha_1\,\beta_i + \alpha_2\,\gamma_i + \alpha_3\,\delta_i]\;[E(R_m) - R_f] \tag{24}$$

Cette équation est équivalente à la relation d'équilibre (18), si on se rappelle que, pour $j = [1, 2, 3]$:

$$b_j = \alpha_j\;[E(R_m) - R_f] \tag{25}$$

En réarrangeant les termes, la relation du MEDAF à quatre moments dépend seulement de deux paramètres η_1 et η_2. Formellement, on a :

$$\mathbf{E} - R_f\,\mathbf{1} = \left(\frac{1}{2 + 3\,\eta_1 + 4\,\eta_2}\right)\,(2\boldsymbol{\beta} + 3\,\eta_1\,\boldsymbol{\gamma} + 4\,\eta_2\,\boldsymbol{\delta})\,[E(R_m) - R_f] \tag{26}$$

où η_1 et η_2 sont définis comme précédemment.

Les coefficients b_1, b_2 et b_3 dépendent finalement de trois éléments : la prime de risque du marché $[E(R_m) - R_f]$ et deux paramètres η_1 et η_2. Ces derniers s'interprètent respectivement comme des élasticités de substitution entre l'asymétrie, la *kurtosis* et la variance du portefeuille de marché. Puisque les

[22] Cette expression est similaire à la relation (13) obtenue par Hwang et Satchell (1999). La seule différence porte sur la définition des paramètres b_1, b_2 et b_3 (*Cf. supra*).

investisseurs rationnels préfèrent, toutes choses égales par ailleurs, une asymétrie positive et éprouvent une aversion pour la variance et la *kurtosis,* le signe du paramètre η_1, qui mesure le rapport de b_2 sur b_1, doit être l'opposé du signe de l'asymétrie du portefeuille de marché. Celui du paramètre η_2, qui mesure le rapport de b_3 sur b_1, doit être positif. Les coefficients b_2 et b_3 et les paramètres η_1 et η_2 constituent ainsi deux mesures complémentaires de la préférence des agents pour l'asymétrie et la *kurtosis* de la distribution du taux de rentabilité de leurs portefeuilles. Les coefficients b_2 et b_3 dépendent du signe et de l'amplitude de la prime de risque du marché. Ils représentent, respectivement, les taux marginaux de substitutions entre l'asymétrie et l'espérance du portefeuille de marché (puisque b_1 dépend de θ_2) et entre la *kurtosis* et l'espérance du portefeuille marché (puisque b_2 dépend de θ_3). Au contraire, les paramètres η_1 et η_2 sont indépendants des fluctuations du marché. Ils traduisent, respectivement, la relation entre le troisième, le quatrième et le deuxième moment centré de la distribution de rentabilité du portefeuille de marché.

Dans le cadre du MEDAF traditionnel, le coefficient b_1 correspond à la prime de risque du portefeuille de marché, quelle que soit la fonction d'utilité élémentaire considérée[23]. Dans le cas du MEDAF à quatre moments[24], l'utilisation de deux portefeuilles spécifiques, en plus de l'actif sans risque et du portefeuille de marché, s'avère nécessaire afin de pouvoir identifier les coefficients b_1, b_2 et b_3 indépendamment de la forme de la fonction d'utilité retenue. La sous-section suivante est consacrée à la définition de ces deux portefeuilles supplémentaires. Avec ces portefeuilles, il est alors possible d'établir la relation canonique du MEDAF à quatre moments et ses représentations graphiques[25] qui généralisent la "droite de marché des capitaux" et la "droite de marché des titres" dans les espaces définis par les quadruplets[26] $[E(R_i),\ \sigma(R_i),\ m(R_i),\ \square(R_i)]$ et $[E(R_i),\ \beta_i,\ \gamma_i,\ \delta_i]$.

3.1.3 La relation fondamentale du MEDAF à quatre moments et l'hyperplan de marché des titres

Pour obtenir la relation fondamentale du MEDAF à quatre moments, il est nécessaire d'introduire, à côté de l'actif sans risque et du portefeuille de marché, deux portefeuilles particuliers supplémentaires, notés respectivement Z_1 et Z_2, dont les rendements ont une covariance nulle avec le rendement du portefeuille de marché. Comme dans le cadre du MEDAF traditionnel, on peut identifier les coefficients b_2 et b_3 en prémultipliant l'équation (18) par $\mathbf{w}'_{Z_1}$ et $\mathbf{w}'_{Z_2}$ qui caractérisent, respectivement, la transposée du vecteur des poids du portefeuille

[23] Comme définie par von Neumann et Morgenstern (1947). Parmi ces fonctions, nous nous restreignons uniquement aux fonctions d'utilité qui appartiennent à la classe des fonctions à aversion absolue hyperbolique en la richesse (HARA).

[24] A moins d'utiliser une fonction d'utilité logarithmique; *Cf.* par exemple Hwang et Satchell (1999).

[25] Cette partie sera complétée ultérieurement...

[26] Où :
$$\begin{cases} m(R_i) = \sqrt[3]{m^3(R_i)} \\ \square(R_i) = \sqrt[4]{\square^4(R_i)} \end{cases}$$

Z_1 et des poids du portefeuille Z_2. On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_2 = \left[\frac{E(R_{Z_1})-R_f}{\gamma_{Z_1}} \right] \\ b_3 = \left[\frac{E(R_{Z_2})-R_f}{\gamma_{Z_2}} \right] \end{array} \right. \tag{27}$$

où $E\left(R_{Z_1}\right)$ est la rentabilité espérée du portefeuille Z_1 qui est non-corrélée avec le portefeuille de marché et qui possède une coasymétrie nulle avec la rentabilité du portefeuille de marché, *i.e.:* $\beta_{Z_1} = Cov\left(R_{Z_1}, R_m\right)/\sigma^2\left(R_m\right) = 0$, $\gamma_{Z_1} = Cos\left(R_{Z_1}, R_m\right)/m^3\left(R_m\right) = 0$, et $\delta_{Z_1} = Cok\left(R_{Z_1}, R_m\right)/\square^4\left(R_m\right)$; et $E\left(R_{Z_2}\right)$ est la rentabilité espérée du portefeuille Z_2 qui est non-corrélée avec le portefeuille de marché et qui possède une *cokurtosis* nulle avec la rentabilité du portefeuille de marché[27] *i.e.:* $\beta_{Z_2} = Cov\left(R_{Z_2}, R_m\right)/\sigma^2\left(R_m\right) = 0$, $\gamma_{Z_2} = Cos\left(R_{Z_2}, R_m\right)/m^3\left(R_m\right)$, et $\delta_{Z_2} = Cok\left(R_{Z_2}, R_m\right)/\square^4\left(R_m\right) = 0$.

En combinant ce résultat avec l'équation (22), on obtient l'expression suivante pour b_1 :

$$b_1 = \left[E\left(R_m\right) - R_f\right] - b_2 - b_3 \tag{28}$$

L'équation d'équilibre devient alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} - R_f\,\mathbf{1} &= \left\{\left[E\left(R_m\right) - R_f\right] - \left[\frac{E\left(R_{Z_1}\right) - R_f}{\gamma_{Z_1}}\right] - \left[\frac{E\left(R_{Z_2}\right) - R_f}{\delta\gamma_{Z_2}}\right]\right\} \boldsymbol{\beta} \\ &\quad + \left[\frac{E\left(R_{Z_1}\right) - R_f}{\gamma_{Z_1}}\right] \boldsymbol{\gamma} + \left[\frac{E\left(R_{Z_2}\right) - R_f}{\delta_{Z_2}}\right] \boldsymbol{\delta} \end{aligned} \tag{29}$$

Si, suivant en cela Athayde et Flôres (1999, 2001) et Berényi (2001-a), l'on suppose qu'il est possible de trouver - dans un large ensemble de portefeuille possibles -, respectivement, deux portefeuilles Z_1 et Z_2 dont la coasymétrie et la *cokurtosis* relative avec le portefeuille de marché sont unitaires, *i.e.* $\gamma_{Z_1} = 1$ et $\delta_{Z_2} = 1$, la relation (29) peut se simplifier comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} - R_f\,\mathbf{1} &= \left\{\left[E\left(R_m\right) - R_f\right] - \left[E\left(R_{Z_1}\right) - R_f\right] - \left[E\left(R_{Z_2}\right) - R_f\right]\right\} \boldsymbol{\beta} \\ &\quad + \left[E\left(R_{Z_1}\right) - R_f\right] \boldsymbol{\gamma} + \left[E\left(R_{Z_2}\right) - R_f\right] \boldsymbol{\delta} \end{aligned} \tag{30}$$

Ces relations conduisent au théorème suivant.

Théorème 2. *Lorsqu'il existe un actif sans risque, la prime de risque d'un actif est donnée par l'équation :*

$$\begin{aligned} \mathbf{E} - R_f\,\mathbf{1} &= \left[E\left(R_m\right) - R_f\right] \boldsymbol{\beta} + \left[E\left(R_{Z_1}\right) - R_f\right] \left(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\beta}\right) \\ &\quad + \left[E\left(R_{Z_2}\right) - R_f\right] \left(\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\beta}\right) \end{aligned} \tag{31}$$

avec :

[27] On suppose ici qu'il existe moins deux portefeuilles non-corrélés avec le portefeuille de marché dont les rentabilités obéissent à ces caratéristiques.

$\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\sigma^2(R_m)} \quad \mathbf{w_m}$, $\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{m^3(R_m)} \Sigma_m$ *et* $\boldsymbol{\delta} = \frac{1}{\square^4(R_m)} \Gamma_m$, *et où* $E(R_{Z_1})$ *est le taux de rentabilité espérée du portefeuille qui possède une covariance nulle, une coasymétrie relative unitaire et une* cokurtosis *relative nulle avec le portefeuille de marché et* $E(R_{Z_2})$ *est le taux de rentabilité espérée du portefeuille qui possède une covariance nulle, une coasymétrie relative nulle et une* cokurtosis *relative unitaire avec le portefeuille de marché.*

Démonstration : *Cf. discussion précédente.*

La relation s'écrit ainsi, pour tout titre i, $i = [1, \ldots, N]$:

$$\begin{aligned} E(R_i) - R_f \quad = \quad & [E(R_m) - R_f]\, \beta_i + [E(R_{Z_1}) - R_f]\, (\gamma_i - \beta_i) \\ & + [E(R_{Z_2}) - R_f]\, (\delta_i - \beta_i) \end{aligned} \tag{32}$$

où : $\beta_i = Cov(R_i, R_m) / \sigma^2(R_m)$ est la *i-ème* composante, avec $i = [1, ..., N]$, du vecteur $\boldsymbol{\beta}$ de dimension $(N \times 1)$, $\gamma_i = Cos(R_i, R_m) / m^3(R_m)$ est la *i-ème* composante, avec $i = [1, ..., N]$, du vecteur $\boldsymbol{\gamma}$ de dimension $(N \times 1)$ et $\delta_i = Cok(R_i, R_m) / \square^4(R_m)$ est la *i-ème* composante, avec $i = [1, ..., N]$, du vecteur $\boldsymbol{\delta}$, de dimension $(N \times 1)$.

La validité de cette relation dépend cependant de l'existence et de l'unicité des portefeuilles Z_1 et Z_2. Lorsque ces conditions sont remplies, on peut, à l'instar de Ingersoll (1987) et Adcock et Shutes (1999), signer *a priori* les primes de risques de marché sans faire aucune hypothèse particulière sur la forme des distributions de rentabilité :

$$\left\{ \begin{array}{l} [E(R_m) - R_f] - [E(R_{Z_1}) - R_f] - [E(R_{Z_2}) - R_f] \geq 0 \\ signe\, [E(R_{Z_1}) - R_f] = -signe\, \left[m^3(R_m)\right] \\ [E(R_{Z_2}) - R_f] \geq 0 \end{array} \right. \tag{33}$$

et, quand $m^3(R_m) \geq 0$ et $E(R_{Z_1}) \geq E(R_{Z_2})$:

$$[E(R_m) - R_f] \geq 0 \tag{34}$$

Un tel résultat ne peut être obtenu sous d'autres hypothèses plus générales (*Cf.* par exemple, Simaan, 1993, sur ce point).

Sous cette forme, le MEDAF à quatre moments constitue une généralisation directe du modèle de Sharpe-Lintner-Mossin[28]. Il se distingue du modèle moyenne-variance par le terme $\{[E(R_{Z_1}) - R_f]\, (\gamma_i - \beta_i) + [E(R_{Z_2}) - R_f]$

[28] Afin de rendre compte du caractère leptokurtique des dsitributions de rentabilité, Rachev et Mittnik (2000)ont proposé une généralisation du MEDAF de Sharpe-Lintner sous l'hypothèse d'une distribution jointe Levy stable. Formellement, la relation d'évaluation peut s'écrire pour tout titre i, comme :

$$E(R_i) - R_f = \left[E(R_m) - R_f\right]\, \beta_i$$

avec :

$$\beta_i = \frac{< R_i;\, R_m >_\alpha}{\|R_m\|_\alpha^\alpha}$$

où α est l'exposant caractéristique, $1 < \alpha < 2$ et : $< R_i; R_m >_\alpha = \int_{IR} \int_{IR} r_i\, r_m^{<\alpha-1>} f(r_i, r_m)\, dr_i dr_m$; $r_i = [R_i - E(R_i)]$ avec $i = [1, \ldots, N]$; $r_m^{<\alpha>} =$

$(\delta_i - \beta_i)\}$. Si ce terme est positif, la relation traditionnelle du MEDAF sous-estime la prime de risque et l'on retrouve l'intuition de Krauss et Litzenberger (1976)[29] selon laquelle la prise en compte des moments centrés d'ordre supérieurs à deux permettrait d'expliquer certaines des anomalies du MEDAF.

Si, pour certains titres i, $\gamma_i = \delta_i = 0$ (*i.e.* la coasymétrie et la *cokurtosis* sont nulles), alors l'équation (30) diffère du MEDAF classique, puisque $[E(R_{Z_1}) - R_f]$ et $[E(R_{Z_2}) - R_f]$ sont par définition différents de zéro. Ceci est dû au fait que l'asymétrie et la *kurtosis* sont ici valorisés par les agents économiques. La relation du MEDAF à quatre moments se ramène à la relation de Sharpe-Lintner-Mossin si et seulement si, *i* : $[E(R_{Z_1}) - R_f] = [E(R_{Z_2}) - R_f] = 0$ ou *ii* : $\beta_i = \gamma_i = \delta_i$. La première condition est vérifiée lorsque tous les agents sont indifférents au caractère asymétrique et leptokurtique des distributions de rentabilités individuelles. La seconde condition est satisfaite pour des titres i dont les sensibilités à la variance, à l'asymétrie et à la *kurtosis* de la distribution de rentabilité du portefeuille de marché sont égales. Ainsi les prix pour un sous-ensemble de titres - ceux pour lesquels $\beta_i = \gamma_i = \delta_i$ - peuvent être correctement évalués par le MEDAF, mais cette relation ne saurait être valide pour tous les actifs

Nous pouvons représenter la relation du MEDAF étendue aux quatres premiers moments de la distribution de rentabilité dans l'espace $[E(R_i),\ \beta_i\ , \gamma_i,\ \delta_i]$. En effet, lorsque la relation du MEDAF à quatre moments est vérifiée, toutes les rentabilités espérées des actifs doivent théoriquement se situer sur un hyperplan de dimension trois. Ce plan correspond à "l'hyperplan de marché des titres" et il est défini par les coordonnées suivantes : $(E(R_m), 1,\ 1, 1)$, $(E(R_{Z_1}), 0, 1, 0)$, $(E(R_{Z_2}), 0, 0, 1)$ et $(R_f, 0,\ 0, 0)$.

L'ensemble des portefeuilles optimaux peut être également représenté dans l'espace $[E(R_i),\ \sigma(R_i),\ m(R_i),\ \square(R_i)]$ par une "droite de marché des capitaux", définie par les caractéristiques de l'actif sans risque, du portefeuille à zéro-bêta gamma-unitaire zéro-delta, du portefeuille zéro-bêta zéro-gamma delta-unitaire et du portefeuille de marché.

En utilisant les définitions des opérateurs de covariance, de coasymétrie et de *cokurtosis*, la relation de valorisation du MEDAF à quatre moments peut s'écrire pour n'importe quel portefeuille p comme :

$$\begin{aligned} E(R_p) - R_f &= [E(R_m) - E(R_Z)]\,\frac{\sigma(R_p)}{\sigma(R_m)}\,\rho_{p,m} \\ &\quad + [E(R_{Z_1}) - R_f]\,\frac{m(R_p)}{m(R_m)}\varsigma_{p,m} + [E(R_{Z_2}) - R_f]\,\frac{\square(R_p)}{\square(R_m)}\zeta_{p,m} \end{aligned} \tag{35}$$

où $\sigma(R_p)$, $m(R_p)$ et $\square(R_p)$ sont, respectivement, l'écart-type, la racine cubique de l'asymétrie et la racine quatrième de la *kurtosis* de la distribution de

$|r_m|^{\alpha}\, sign(r_m)$ et $f(r_i, r_m)$ qui caractérisent la distribution jointe des variables aléatoires centrées et $\|R_m\|_{\alpha}^{\alpha} =< R_m; R_m >_{\alpha}$ (*Cf.* Samorodnitsky et Taqqu, 1994). Une approche similaire, compatible avec le MEDAF à quatre moments, consisterait à considérer une distribution de rentabilité Levy stable asymétrique.

[29] *Cf.* Krauss and Litzenberger (1976), pp.1085-1086.

rentabilité du portefeuille p ; $\sigma(R_m)$, $m(R_m)$ et $\square(R_m)$ sont l'écart-type, la racine cubique de l'asymétrie et la racine quatrième de la *kurtosis* de la distribution de rentabilité du portefeuille de marché ; et $\rho_{p,m}$, $\varsigma_{p,m}$ et $\zeta_{p,m}$ sont respectivement le coefficient de corrélation, le coefficient de coasymétrie et le coefficient de *cokurtosis* entre la rentabilité du portefeuille p et celle du portefeuille de marché, tels que :

$$\rho_{p,m} = \frac{Cov(R_p, R_m)}{\sigma(R_p)\,\sigma(R_m)},\ \varsigma_{p,m} = \frac{Cos(R_p, R_m)}{m(R_p)\,m^2(R_m)} \text{ et } \zeta_{p,m} = \frac{Cok(R_p, R_m)}{\square(R_p)\,\square^3(R_m)}$$

En utilisant le théorème de séparation monétaire à deux fonds, on en déduit que la rentabilité espérée de tout portefeuille optimal p doit satisfaire la relation suivante :

$$\begin{aligned} E(R_p) - R_f &= [E(R_m) - E(R_Z)]\,\frac{\sigma(R_p)}{\sigma(R_m)} \\ &\quad + [E(R_{Z_1}) - R_f]\,\frac{m(R_p)}{m(R_m)} + [E(R_{Z_2}) - R_f]\,\frac{\square(R_p)}{\square(R_m)} \end{aligned} \tag{36}$$

avec :

$$\begin{cases} \sigma(R_p) = \alpha_p\,\sigma(R_m) \\ m(R_p) = \alpha_p\,m(R_m) \\ \square(R_p) = \alpha_p\,\square(R_m) \end{cases}$$

où α_p, $0 \square \alpha_p \square 1$, est la proportion de la richesse de l'agent investie dans le portefeuille de marché.

L'ensemble des portefeuilles optimaux peut ainsi être représenté dans l'espace $[E(R_i),\ \sigma(R_i),\ m(R_i),\ \square(R_i)]$ par une droite que nous appellons "droite de marché des capitaux" en référence à celle du MEDAF traditionnel.

Une relation linéaire entre la rentabilité du portefeuille de marché et la rentabilité d'un portefeuille non-corrélé est mise en évidence, comme dans le cadre du modèle de Black (1972). Mais ici, on considère un marché avec un actif sans risque et deux portefeuilles non-corrélés avec le portefeuille de marché, Z_1 et Z_2, dont les rentabilités sont respectivement multipliées par des constantes γ_i et δ_i qui sont spécifiques pour chaque titre. L'equation (29) est également compatible avec un modèle d'évaluation par arbitrage[30]. L'aspect intéressant est que la relation du MEDAF à quatre moments permet de pré-identifier les facteurs. Toutes les relations établies précédemment, comme celles mises en évidence par Rubinstein (1973), reposent sur l'existence d'un actif sans risque. L'étude des propriétés de la frontière efficiente dans l'espace $[E(R_i), \sigma(R_i), m(R_i)]$ permet de généraliser l'approche dans le cas à N actifs risqués.

[30] Dans la sous-section 3.3., nous étudions les liens entre le MEDAF à quatre moments et le MEA de Ross (1976).

3.2 Une extension du MEDAF à quatre moments à N actifs risqués

L'agrégation des conditions d'équilibres individuelles, obtenues par la maximisation d'un développement limité de Taylor d'ordre quatre de l'espérance d'utilité, nous a permis d'établir la relation fondamentale du MEDAF à quatre moments. Pour atteindre ce résultat, l'utilisation d'un théorème de séparation à deux fonds s'est avérée nécessaire, ce qui restreint le champ de validité du MEDAF à quatre moments puisque l'existence d'un actif sans risque est nécéessaire. Dans la sous-section suivante,nous adoptons l'approche de la théorie de sélection de portefeuille développée par Markowitz (1952) dans le cadre espérance-variance et récemment généralisée par Simaan (1993) lorsque les chocs de rentabilités ont une composante asymétrique. Dans ce cadre, l'investisseur choisit le portefeuille qui minimise la variance des rentabilités de son portefeuille pour une espérance, une asymétrie et une *kurtosis* donnés[31]. Ceci nous permet de caractériser la frontière des portefeuilles moyenne-variance-asymétrie-*kurtosis* efficients (*Cf.* sous-section 3.2.1). L'hypothèse d'une allocation d'équilibre *Pareto*-optimale conduit ensuite à une généralisation de la relation du MEDAF à quatre moments en absence d'un actif sans risque (*Cf.* sous-section 3.2.2).

3.2.1 Les propriétés générales de l'ensemble des portefeuilles myenne-variance-asymétrie-*kurtosis* efficients

Dans le cadre de distributions asymétriques et leptokurtiques, le programme d'optimisation d'un investisseur peut être reformulé de la manière suivante[32]:

$$\underset{\mathbf{w}_p^{'}}{Min} \quad \left\{ \frac{1}{2}\, \mathbf{w}_p^{'} \quad \mathbf{w}_p \right\} \tag{37}$$

$$s.c. \begin{cases} \mathbf{w}_p^{'} \mathbf{E} = \mu \\ \mathbf{w}_p^{'} \mathbf{1} = 1 \\ \mathbf{w}_p^{'} \Sigma_p = s \\ \mathbf{w}_p^{'} \Gamma_p = k \end{cases}$$

où μ, s et k correspondent respectivement à des niveaux de rentabilité espérée, d'asymétrie et de *kurtosis* donnés.

L'ensemble des portefeuilles optimaux, correspondant au différents triplets de coordonnées $[\mu, s, k]$, caractérise l'ensemble des portefeuilles moyenne-variance-

[31] Ou, de manière équivalente, que l'investisseur choisit le portefeuille qui maximise l'asymétrie du rendement de son portefeuille pour une espérance, une variance et une *kurtosis* donnés, ou encore qu'il sélectionne le portefeuille qui minimise la *kurtosis* de son portefeuille pour une espérance, une variance et une asymétrie donnés, ou enfin qu'il choisit le portefeuille qui maximise l'espérance de rendement de son portefeuille pour une variance, une asymétrie et une *kurtosis* donnés.

[32] Le programme de choix de portefeuille de l'investisseur n'est pas unique. Ainsi, Berényi (2001-a) propose - en utilisant un critère de programmation polynomiale objectif - d'incorporer plusieurs objectifs tels que la maximisation de l'espérance, la maximisation de l'asymétrie et la minimisation de la *kurtosis* de la rentabilité du portefeuille pour un niveau de variance donné.

asymétrie-*kurtosis* efficients. Par définition, celui-ci correspond à l'ensemble des portefeuilles qui maximisent l'espérance de rentabilité pour des niveaux de variance, d'asymétrie et de *kurtosis* donnés.

Nous pouvons alors énoncer les deux théorèmes suivants.

Théorème 3. *Le vecteur de poids des actifs de n'importe quel portefeuille moyenne-variance-asymétrie-*kurtosis *efficient peut être obtenu comme une combinaison linéaire des vecteurs de poids de quatre fonds distincts, définis par :*

$$\mathbf{w}_{a_1} = \frac{{}^{-1}\mathbf{E}}{\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\mathbf{E}};\ \mathbf{w}_{a_2} = \frac{{}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\mathbf{1}};\ \mathbf{w}_{a_3} = \frac{{}^{-1}\Sigma_p}{\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\Sigma_p} \text{ et } \mathbf{w}_{a_4} = \frac{{}^{-1}\Gamma_p}{\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\Gamma_p} \quad (38)$$

Démonstration : *Cf. Annexe 4.*

Corollaire 2. *S'il existe un actif sans risque, tout vecteur de poids d'un portefeuille efficient est une combinaison linéaire des vecteurs de poids de l'actif sans risque et de trois fonds risqués distincts, définis par les vecteurs de poids suivants :*

$$\mathbf{w}_{a_5} = \frac{{}^{-1}(\mathbf{E}-R_f\,\mathbf{1})}{\mathbf{1}' \quad {}^{-1}(\mathbf{E}-R_f\,\mathbf{1})},\ \mathbf{w}_{a_6} = \frac{{}^{-1}\Sigma_p}{\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\Sigma_p} \text{ et } \mathbf{w}_{a_7} = \frac{{}^{-1}\Gamma_p}{\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\Gamma_p} \quad (39)$$

Démonstration : *Cf. Annexe 4.*

Comparé aux résultats de l'analyse moyenne-variance, l'introduction des moments centrés d'ordre trois et quatre a pour effet ici de changer la structure de l'ensemble des portefeuilles efficients : celui-ci n'est plus déterminé par deux mais plutôt par quatre portefeuilles[33]. Les deux premiers portefeuilles sont communs à tous les investisseurs et correspondent aux deux fonds qui génèrent la frontière efficiente moyenne-variance. On remarque en particulier que[34] $\mathbf{w}_{a_2}$ est le portefeuille de variance *minimale* globale. Le troisième portefeuille $\mathbf{w}_{a_3}$ (ou $\mathbf{w}_{a_6}$ avec un actif sans risque) et le quatrième portefeuille $\mathbf{w}_{a_4}$ (ou $\mathbf{w}_{a_7}$ avec un titre sans risque) sont spécifiques à chaque investisseur. Ils représentent respectivement les portefeuilles qui, pour une variance donnée, maximise (minimise) l'asymétrie et minimise la *kurtosis*. Par conséquent, l'ensemble des portefeuilles moyenne-variance-asymétrie-*kurtosis* efficients comprend l'ensemble de portefeuilles moyenne-variance efficient puisque ce dernier est défini par $\mathbf{w}_{a_1}$, par $\mathbf{w}_{a_2}$(ou l'actif sans risque et $\mathbf{w}_{a_4}$ lorsqu'il existe actif sans risque). Puisque les investisseurs ont des demandes de titres qui diffèrent selon leurs préférences, la frontière efficiente ne possède plus la propriété de séparation de portefeuille lorsque les distributions de rentabilités sont asymétriques et leptokurtiques[35].

[33] On peut remarquer, que $\mathbf{w}_{a3}$ (ou $\mathbf{w}_{a5}$) diffèrent du troisième portefeuille utilisé par Simaan, (1993), puisque $\mathbf{w}_{a_3}$ (ou $\mathbf{w}_{a_5}$) dépendent ici des préférences des agents.

[34] On vérifie que la moyenne et la variance du portefeuille ddefinis par le vecteur de poids $\mathbf{w}_{a2}$ sont donnés par:

$$\begin{cases} E(R_{a2}) = a/c \\ \sigma^2(R_{a2}) = 1/c \end{cases}$$

où $a = \mathbf{E}' \quad {}^{-1}\mathbf{1}$, et $c = \mathbf{1}' \quad {}^{-1}\mathbf{1}$.

[35] Si l'on considère une classe particulière de distribution de rentabilités et que l'on utilise

Théorème 4. *Une conditions nécessaire pour qu'un portefeuille* p *appartienne à l'ensemble moyenne-variance-asymétrie*-kurtosis *efficient est - à l'exception du cas des portefeuilles variance-asymétrie*-kurtosis *efficients*[36] *- qu'il existe trois portefeuilles* Z_0, Z_1 *et* Z_2 *non-corrélés avec* p, *tels que :*

$$\begin{aligned}\mathbf{E} - E\left(R_{Z_0}\right)\mathbf{1} \quad = \quad & \left\{\left[E\left(R_p\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] - \left[E\left(R_{Z_1}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right]\right. \\ & \left. - \left[E\left(R_{Z_2}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right]\right\} \quad \mathbf{w}_p \ \left[\sigma^2\left(R_p\right)\right]^{-1} \\ & + \left[E\left(R_{Z_1}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] \ \Sigma_p \ \left[m^3\left(R_p\right)\right]^{-1} \\ & + \left[E\left(R_{Z_2}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] \ \Gamma_p \ \left[\square^4\left(R_p\right)\right]^{-1}\end{aligned} \tag{40}$$

où $E\left(R_{Z_0}\right)$ *représente le taux de rentabilité espérée d'un portefeuille dont la rentabilité est non-corrélée et qui possède une coasymétrie et une* cokurtosis *nulles avec la rentabilité du portefeuille* p *;* $E\left(R_{Z_1}\right)$ *représente le taux de rentabilité espérée d'un portefeuille dont la rentabilité est non-corrélée avec la rentabilité du portefeuille* p *et qui possède une coasymétrie égale à l'asymétrie de ce dernier et une* cokurtosis *nulle avec celui-ci ; et* $E\left(R_{Z_2}\right)$ *représente le taux de rentabilité espérée d'un portefeuille dont la rentabilité est non-corrélée avec le portefeuille* p *et qui est caractérisée par une coasymétrie nulle avec celui-ci et une* cokurtosis *égale à la* kurtosis *de ce portefeuille.*

Démonstration : *Cf. Annexe 6.*

Pour n'importe quel titre i, $i = [1, ..., N]$, on peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned}E\left(R_i\right) - E\left(R_{Z_0}\right) \quad = \quad & \left\{\left[E\left(R_p\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] - \left[E\left(R_{Z_1}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right]\right. \\ & \left. - \left[E\left(R_{Z_2}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right]\right\} Cov\left(R_i, R_p\right)\left[\sigma^2\left(R_p\right)\right]^{-1} \\ & + \left[E\left(R_{Z_1}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] \ Cos\left(R_i, R_p\right)\left[m^3\left(R_p\right)\right]^{-1} \\ & + \left[E\left(R_{Z_2}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] \ Cok\left(R_i, R_p\right)\left[\square^4\left(R_p\right)\right]^{-1}\end{aligned} \tag{41}$$

où $Cov\left(R_i, R_p\right)$, $Cos\left(R_i, R_p\right)$ et $Cok\left(R_i, R_p\right)$ sont, respectivement, les *i-èmes* composantes, avec $i = [1, ..., N]$, des vecteurs $\mathbf{w}_p, \Sigma_p$ et Γ_p, de dimensions $(N \times 1)$.

Cette relation énonce qu'un portefeuille p est moyenne-variance-asymétrie-*kurtosis* efficient si et seulement si son rendement est tel que la rentabilité espérée de n'importe quel titre $E\left(R_i\right)$, avec $i = [1, ..., N]$, est une combinaison linéaire de la covariance, de la coasymétrie et de la *cokurtosis* entre chaque rentabilité R_i et la rentabilité du portefeuille efficient p. Les termes Π_1, Π_2 et

---

respectivement la racine cubique de $m^3\left(R_p\right)$ et la racine quatrième de $\square^4\left(R_p\right)$ comme mesures de la préférence des investisseurs pour l'asymétrie et la *kurtosis*, il est possible d'obtenir un théorème de séparation à trois fonds exact (*Cf.* Ingersoll 1987 et Hübner et Honhon, 1999).

[36] C'est à dire, des portefeuilles qui sont solutions du programme de minimisation de la variance pour une asymétrie et une *kurtosis* donnés.

Π_3 tels que :

$$\left\{\begin{array}{l}\Pi_1 = \{ [E(R_p) - E(R_{Z_0})] - [E(R_{Z_1}) - E(R_{Z_0})] \\ \qquad - [E(R_{Z_2}) - E(R_{Z_0})] \} Cov(R_i, R_p) \left[\sigma^2(R_p)\right]^{-1} \\ \Pi_2 = [E(R_{Z_1}) - E(R_{Z_0})] \; Cos(R_i, R_p) \left[m^3(R_p)\right]^{-1} \\ \Pi_3 = [E(R_{Z_2}) - E(R_{Z_0})] \; Cok(R_i, R_p) \left[\square^4(R_p)\right]^{-1} \end{array}\right.$$

peuvent s'interpréter comme des primes de risque subjectives. Le fait que les investisseurs éprouvent de l'aversion pour la variance et la *kurtosis,* et qu'ils aient une préférence pour l'asymétrie (positive) implique que :

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{E(R_p) - E(R_{Z_0}) - E(R_{Z_1}) - E(R_{Z_2})}{\sigma^2(R_p)}\right] > 0 \\ \left[\frac{E(R_{Z_1}) - E(R_{Z_0})}{m^3(R_p)}\right] < 0 \\ \left[\frac{E(R_{Z_2}) - E(R_{Z_0})}{\square^4(R_p)}\right] > 0 \end{array}\right. \tag{42}$$

Une fois ces propriétés énoncées, il est possible d'obtenir la relation du MEDAF à quatre moments quand il n'y a pas d'actif sans risque. Pour ce faire, il suffit d'identifier un portefeuille moyenne-variance-asymétrie-*kurtosis* efficient particulier : le portefeuille de marché.

3.2.2 Le MEDAF à quatre moments avec N actifs risqués

Les hypothèses générales du modèle sont celles de Rubinstein (1973) : les agents ont des préférences moyenne-variance-asymétrie-*kurtosis* et des anticipations homogènes concernant les distributions de probabilité des actifs financiers. On suppose de plus qu'il existe une allocation d'équilibre *Pareto*-optimale[37]. Sous cette dernière hypothèse, l'ensemble des portefeuilles moyenne-variance-asymétrie-*kurtosis* efficients est convexe (*Cf.* Ingersoll, 1987, pp. 194-195). Puisque tous les investisseurs détiennent des portefeuilles efficients, le portefeuille de marché est à l'équilibre, également un portefeuille moyenne-variance-asymétrie-*kurtosis* efficient. Il en résulte que lorsque le marché est à l'équilibre, le taux de rentabilité espéré d'un titre est une fonction linéaire de sa covariance, de sa coasymétrie et de sa *cokurtosis* avec la rentabilité du portefeuille de marché. On obtient, en d'autres termes, le théorème suivant[38].

Théorème 5. *En l'absence d'un actif sans risque, les primes de risques d'un équilibre* Pareto-*optimal sont données par l'équation :*

$$\begin{aligned}\mathbf{E} - E(R_{Z_0})\,\mathbf{1} \;=\;& \{[E(R_m) - E(R_{Z_0})] - [E(R_{Z_1}) - E(R_{Z_0})] \\ & - [E(R_{Z_2}) - E(R_{Z_0})]\}\,\boldsymbol{\beta} \\ & + [E(R_{Z_1}) - E(R_{Z_0})]\,\boldsymbol{\gamma} + [E(R_{Z_2}) - E(R_{Z_0})]\,\boldsymbol{\delta}\end{aligned} \tag{43}$$

[37] *Cf.* sur ce point, par exemple, Simaan (1993).

[38] Avec des notations et des hypothèses différentes, Athayde et Flôres (1999 et 2000), ont établi la même relation.

avec :

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\sigma^2(R_m)} \quad \mathbf{w_m};\ \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{m^3(R_m)}\Sigma_m \ \ et\ \boldsymbol{\delta} = \frac{1}{\square^4(R_m)}\Gamma_m$$

où $E(R_{Z_0})$ représente le taux de rentabilité espéré du portefeuille zéro-bêta zéro-gamma zéro-delta, $E(R_{Z_1})$ correspond au taux de rentabilité espéré du portefeuille zéro-bêta gamma unitaire zéro-delta et $E(R_{Z_2})$ représente le taux de rentabilité espéré d'un portefeuille zero-bêta zero-gamma delta unitaire.

Démonstration : *Cf. Annexe 7.*

Ainsi pour tout titre i, $i = [1, \ldots, N]$:

$$\begin{aligned} E(R_i) - E(R_{Z_0}) &= \{[E(R_m) - E(R_{Z_0})] - [E(R_{Z_1}) - E(R_{Z_0})] \\ &\quad - [E(R_{Z_2}) - E(R_{Z_0})]\}\ \beta_i \\ &\quad + [E(R_{Z_1}) - E(R_{Z_0})]\ \gamma_i + [E(R_{Z_2}) - E(R_{Z_0})]\ \delta_i \end{aligned} \tag{44}$$

où : $\beta_i = Cov(R_i, R_m)/\sigma^2(R_m)$ est la *i-ème* composante, avec $i = [1, ..., N]$, du vecteur $\boldsymbol{\beta}$ de dimension $(N \times 1)$, $\gamma_i = Cos(R_i, R_m)/m^3(R_m)$ est la *i-ème* composante, avec $i = [1, ..., N]$, du vecteur $\boldsymbol{\gamma}$ de dimension $(N \times 1)$ et $\delta_i = Cok(R_i, R_m)/\square^4(R_m)$ est la *i-ème* composante, avec $i = [1, ..., N]$, du vecteur $\boldsymbol{\delta}$, de dimensions $(N \times 1)$.

On remarque que :

$$\begin{cases} [E(R_m) - E(R_{Z_1})] \geq 0 \\ signe\ [E(R_{Z_1}) - E(R_{Z_0})] = -signe\ \left[m^3(R_m)\right] \\ [E(R_{Z_2}) - E(R_{Z_0})] \geq 0 \end{cases} \tag{45}$$

et, quand $m^3(R_m) \ \square\ 0$:

$$[E(R_m) - E(R_{Z_0})] \geq 0 \tag{46}$$

Cette équation est la relation du MEDAF à quatre moments avec N actifs risqués.[39] Comme pour la relation fondamentale du MEDAF à quatre moments dévelopée par Athayde et Florès (2000) et Berényi (2001-b), elle indique qu'en présence de distributions de rentabilités asymétriques et leptokurtiques, la prime de risque de tout actif doit être égale à la somme de trois primes de risque : une prime de marché $[\ E(R_m) -\ E(R_{Z_1})]$ proportionnelle au β de l'actif qui correspond à la prime placée par le marché sur la variance, une prime sur un portefeuille zéro-bêta gamma unitaire zéro-delta, $[E(R_{Z_1}) - E(R_{Z_0})]$, proportionnelle au γ de l'actif qui représente la prime de risque placée par le marché sur l'asymétrie et une prime sur un portefeuille zéro-bêta zéro-gamma delta unitaire, $[E(R_{Z_2}) -\ E(R_{Z_0})]$, proportionnelle au δ de l'actif qui représente la prime de risque placée par le marché sur la *kurtosis*.

En faisant apparaître la prime de risque du portefeuille de marché $[E(R_m) - E(R_{Z_0})]$ dans l'équation (42), il est possible de réécrire cette relation d'équilibre

[39] Avec nos hypothèses générales, il est possible, de signer *a priori* les primes de risque *(Cf.* Simaan, 1993, sur ce point).

comme :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} - E\left(R_{Z_0}\right)\mathbf{1} \quad = \quad & \left[E\left(R_m\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right]\ \boldsymbol{\beta} \\
& + \left[E\left(R_{Z_1}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right]\ \left(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\beta}\right) \\
& \quad + \left[E\left(R_{Z_2}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right]\ \left(\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\beta}\right)
\end{aligned} \tag{47}$$

Soit pour tout titre i, $i = [1, \ldots, N]$:

$$\begin{aligned}
E\left(R_i\right) - E\left(R_{Z_0}\right) \quad = \quad & \left[E\left(R_m\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right]\ \beta_i \\
& + \left[E\left(R_{Z_1}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right]\ \left(\gamma_i - \beta_i\right) \\
& \quad + \left[E\left(R_{Z_2}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right]\ \left(\delta_i - \beta_i\right)
\end{aligned} \tag{48}$$

où $\beta_i = Cov\left(R_i, R_m\right) / \sigma^2\left(R_m\right)$ est la *i-ème* composante, avec $i = [1, ..., N]$, du vecteur $\boldsymbol{\beta}$ de dimension $(N \times 1)$, $\gamma_i = Cos\left(R_i, R_m\right) / m^3\left(R_m\right)$ est la *i-ème* composante, avec $i = [1, ..., N]$, du vecteur $\boldsymbol{\gamma}$ de dimension $(N \times 1)$ et $\delta_i = Cok\left(R_i, R_m\right) / \square^4\left(R_m\right)$ est la *i-ème* composante, avec $i = [1, ..., N]$, du vecteur $\boldsymbol{\delta}$, de dimension $(N \times 1)$.

Sous cette forme, la relation du MEDAF à quatre moments avec N actifs risqués constitue une généralisation directe du MEDAF à zéro-bêta développé par Black (1972). Cette relation ne se ramène cependant pas au modèle de Black sous les mêmes conditions qui font que la relation fondamentale du MEDAF à quatre moments se ramène au modèle de Sharpe-Lintner-Mossin en présence d'un actif sans risque. En effet, à moins que le portefeuille zéro-bêta zéro-gamma zéro-delta soit identique au portefeuille de variance *minimale* globale, l'ordonnée à l'origine de la droite de marché que l'on obtient lorsque $\left[E\left(R_{Z_1}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] = \left[E\left(R_{Z_2}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] = 0$ ou lorsque $\gamma_i = \delta_i = \beta_i$ avec $i = [1, \ldots, N]$ n'a aucune raison d'être égale à l'ordonnée à l'origine du modèle de Black (1972). Si un actif sans risque existe, sa rentabilité remplace $E\left(R_{Z_0}\right)$ dans la relation d'équilibre et l'on retrouve la relation fondamentale avec un actif sans risque obtenue dans la sous-section 3.1.

3.3 Le MEDAF à quatre moments, le modèle de marché cubique et le MEA

Lorque les distributions sont asymétriques et leptokurtiques, le processus des rentabilités boursières est gouverné par trois facteurs de risques qui déterminent les choix de portefeuille des agents. De tels facteurs de risques conduisent à l'existence de primes qui sont exigées par tout investisseur rationnel. Suivant Homaifar et Graddy (1988) et Hwang et Satchell (1999), il est alors possible de mettre en relation certains des principaux modèles multifactoriels avec le MEDAF à quatre moments décrit précédemment. Nous nous concentrons, dans les sous-sections suivantes, sur le modèle de marché cubique et le MEA.

3.3.1 Le modèle de marché cubique et le MEDAF à quatre Moments

Comme l'ont montré Homaifar et Graddy (1988) et Hwang et Satchell (1999), il est possible d'utiliser le modèle de marché cubique comme modèle statistique de génération des rendements des actifs dans le cadre du MEDAF à quatre moments. Le modèle de marché cubique suppose en effet que le taux de rentabilité excédentaire de tout actif peut être généré par le modèle factoriel suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{R}_t - R_f\,\mathbf{1} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1\,(R_{mt} - R_f) + \boldsymbol{\alpha}_2\,[R_{mt} - E(R_m)]^2 \\ \qquad\qquad + \boldsymbol{\alpha}_3\,[R_{mt} - E(R_m)]^3 + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0} \\ E(\boldsymbol{\varepsilon}_t | R_{mt}, R_{mt}^2, R_{mt}^3) = \mathbf{0} \end{array}\right. \tag{49}$$

où : $\mathbf{R}_t$ est le vecteur des rentabilités des actifs risqués de dimension $(N \times 1)$; $\boldsymbol{\alpha}_0$ est le vecteur des ordonnées à l'origine des rentabilités excédentaire des actifs, de dimension $(N \times 1)$; $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ et $\boldsymbol{\alpha}_3$ sont, respectivement, les vecteurs des sensibilités des rentabilités des actifs avec les variations du marché, le carré et le cube du rendement du portefeuille de marché, de dimension $(N \times 1)$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ est le vecteur des perturbations des rentabilités des actifs, de dimension $(N \times 1)$.

Sous cette hypothèse, il est possible de relier les coefficients $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ et $\boldsymbol{\alpha}_3$ de ce modèle statistique avec les paramètres $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ and $\boldsymbol{\delta}$ du MEDAF à quatre moments. En soustrayant l'équation (49) à son espérance mathématique, et en utilisant les définitions des mesures de risques $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ et $\boldsymbol{\delta}$, on obtient le résultat suivant (*Cf.* Annexe 8) :

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2\,\frac{m^3(R_m)}{\sigma^2(R_m)} + \boldsymbol{\alpha}_3\,\frac{\square^4(R_m)}{\sigma^2(R_m)} \\ \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2\,\frac{\square^4(R_m) - \left[\sigma^2(R_m)\right]^2}{m^3(R_m)} + \boldsymbol{\alpha}_3\frac{\xi^5(R_m) - \sigma^2(R_m)\,m^3(R_m)}{m^3(R_m)} \\ \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2\,\frac{\xi^5(R_m) - \sigma^2(R_m) m^3(R_m)}{\square^4(R_m)} + \boldsymbol{\alpha}_3\,\frac{\zeta^6(R_m) - \left[m^3(R_m)\right]^2}{\square^4(R_m)} \end{array}\right. \tag{50}$$

où $\sigma^2\,(R_m)$, $m^3\,(R_m)$ et $\square^4\,(R_m)$ sont définis comme précédemment et $\xi^5\,(R_m)$ et $\zeta^6\,(R_m)$ représentent, respectivement, le moment centré d'ordre cinq et d'ordre 6 de la distribution de rentabilité du portefeuille de marché.

Ainsi,pour tout titre i, $i = [1, \ldots, N]$:

$$\left\{\begin{array}{l} \beta_i = \alpha_{1i} + \frac{\alpha_{2i}\; m^3(R_m) + \alpha_{3i}\,\square^4(R_m)}{\sigma^2(R_m)} \\ \gamma_i = \alpha_{1i} + \frac{\alpha_{2i}\left\{\square^4(R_m) - \left[\sigma^2(R_m)\right]^2\right\} + \alpha_{3i}\left\{\xi^5(R_m) - \sigma^2(R_m)\,m^3(R_m)\right\}}{m^3(R_m)} \\ \delta_i = \alpha_{1i} + \frac{\alpha_{2i}\left\{\xi^5(R_m) - \sigma^2(R_m) m^3(R_m)\right\} + \alpha_{3i}\left\{\zeta^6(R_m) - \left[m^3(R_m)\right]^2\right\}}{\square^4(R_m)} \end{array}\right. \tag{51}$$

où $\beta_i = Cov\,(R_i, R_m)\,/\sigma^2\,(R_m)$ est la *i-ème* composante, avec $i = [1, ..., N]$, du vecteur $\boldsymbol{\beta}$ de dimension $(N \times 1)$, $\gamma_i = Cos\,(R_i, R_m)\,/m^3\,(R_m)$ est la *i-ème* composante, avec $i = [1, ..., N]$, du vecteur $\boldsymbol{\gamma}$ de dimension $(N \times 1)$ et $\delta_i = Cok\,(R_i, R_m)\,/\square^4\,(R_m)$ est la *i-ème* composante, avec $i = [1, ..., N]$, du vecteur $\boldsymbol{\delta}$, de dimension $(N \times 1)$.

Ces équations nous renseignent sur la nature des relations entre le modèle de marché cubique et le MEDAF à quatre moments. Par exemple, si les poids sur α_{2i} sont égaux, alors on a $\beta_i = \gamma_i$. Si α_{1i} où α_{2i} est constant pour tout i alors β_i et γ_i sont colinéaires.

Sous certaines restrictions sur les paramètres, le modèle de marché cubique est compatible avec le MEDAF à quatre moments. Lorsque le modèle de marché est quadratique (*Cf.* Krauss et Litzenberger, 1976), le modèle d'évaluation d'actifs financiers à quatre moments se ramène au MEDAF à trois moments[40] et lorsque le modèle de marché est linéaire, le modèle d'évaluation des actifs financiers à quatre moments se ramène au MEDAF traditionnel.

3.3.2 Le modèle d'évaluation par arbitrage et le MEDAF à quatre moments

De la même façon il est possible de relier le MEDAF à quatre moments avec la théorie d'évaluation par arbitrage de Ross (1976).

Considérons tout d'abord le modèle de marché cubique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_t = \boldsymbol{\alpha}_0^* + \boldsymbol{\alpha}_1^* \, R_{mt} + \boldsymbol{\alpha}_2^* \, \nu_{mt}^2 + \boldsymbol{\alpha}_3^* \, \nu_{mt}^3 + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ Cov(R_{mt}, \nu_{mt}^2) = 0 \\ Cov(R_{mt}, \nu_{mt}^3) = 0 \\ Cov(\nu_{mt}^2, \nu_{mt}^3) = 0 \\ E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0} \\ E(\boldsymbol{\varepsilon}_t | R_{mt}, \nu_{mt}^2, \nu_{mt}^3) = \mathbf{0} \\ E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^{'}) = \mathbf{D} \end{array} \right. \tag{52}$$

où $\mathbf{R}_t$, $\boldsymbol{\alpha}_i^*$ avec $i = [1, 2, 3]$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ sont définis comme précédemment lorsque le rendement, le rendement au carré et le rendement au cube du portefeuille de marché sont orthogonaux entre eux ; ν_{mt}^2 est la composante de la rentabilité du portefeuille de marché au carré qui est indépendante des variations du marché ; ν_{mt}^3 est la composante de la rentabilité du portefeuille de marché élevée au cube qui est indépendante des variations du marché et des rendements au carré du portefeuille de marché et $\mathbf{D}$ est la matrice diagonale de variance-covariance des perturbations des rentabilités des actifs, de dimensions $(N \times N)$.

Si l'équation (52) représente le modèle factoriel générateur des rentabilités des actifs, alors sous les hypothèses traditionnelles du MEA, les rentabilités espérées de tous les titres doivent satisfaire asymptotiquement la relation suivante[41] :

$$\mathbf{E} - R_f \, \mathbf{1} = \boldsymbol{\alpha}_1^* \, [E\,(R_1) - R_f] + \boldsymbol{\alpha}_2^* \, [E\,(R_2) - R_f] + \boldsymbol{\alpha}_3^* \, [E\,(R_3) - R_f] \tag{53}$$

où $E\,(R_1)$, $E\,(R_2)$ et $E\,(R_3)$ sont, respectivement, les rentabilités espérées de portefeuilles bien diversifiés[42] parfaitement corrélés avec R_{mt}, ν_{mt}^2 et ν_{mt}^3.

[40] Pour une discussion approfondie de l'utilisation du modèle de marché quadratique dans le cadre du MEDAF à trois moments, *Cf.* Krauss et Litzenberger (1976), Barone-Adesi (1985), Barone-Adesi *et alii* (2001) et Brooks et Faff (1998).

[41] Pour écrire (52) comme une relation d'évaluation éxacte dans une économie asymptoyique, on suppose ici que les conditions du théorème 5 d'Ingersoll (1987), p.187, sont satisfaites (c'est à dire que le portefeuille de marché est un portefeuille bien diversifié).

[42] Un portefeuille bien diversifié est un portefeuille qui contient un grand nombre d'actifs avec des poids relatifs de l'ordre de $1/N$.

Pour le portefeuille de marché, $\alpha^*_{1m} = 1$, $\alpha^*_{2m} = 0$ et $\alpha^*_{3m} = 0$, ce qui implique que :

$$E(R_1) = E(R_m) \tag{54}$$

Concernant les portefeuilles dont les rentabilités sont respectivement R_2 et R_3, il est plus difficile de donner une définition aussi simple. On peut montrer, néanmoins, suivant l'approche de Barone-Adesi (1985) et Barone-Adesi *et alii* (2001) que R_2 et R_3 sont toujours bornés supérieurement par (*Cf.* Annexe 9) :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(R_2) < E\left(\nu^2_m\right) \\ E(R_3) < E\left(\nu^3_m\right) \end{array} \right. \tag{55}$$

En substituant l'expression (54) dans l'équation (53), on a :

$$\mathbf{E} - R_f\,\mathbf{1} = \boldsymbol{\alpha}^*_1\ [E(R_m) - R_f] + \boldsymbol{\alpha}^*_2\ [E(R_2) - R_f] + \boldsymbol{\alpha}^*_3\ [E(R_3) - R_f] \tag{56}$$

Cette relation d'équilibre indique que la rentabilité excédentaire d'un titre est une fonction linéaire de trois primes de risques : la première correspond à la rentabilité excédentaire du portefeuille de marché, la deuxième est reliée à la rentabilité en excès du taux sans risque d'un portefeuille dont le rendement est parfaitement corrélé avec le rendement au carré du portefeuille de marché et indépendant du rendement du marché, et la troisième est liée à la rentabilité excédentaire d'un portefeuille dont le rendement est parfaitement corrélé avec le rendement au cube du portefeuille de marché et indépendant des variations du marché et du rendement au carré du portefeuille de marché. En prenant la valeur espérée de (52) et en égalisant l'expression obtenue avec l'équation (56), on obtient pour tout actif i, $i = [1, \ldots, N]$:

$$\begin{array}{c} \alpha^*_{0i} + \alpha^*_{1i} E(R_m) + \alpha^*_{2i} E\left(\nu^2_m\right) + \alpha^*_{3i} E\left(\nu^3_m\right) = R_f + \alpha^*_{1i}\ [E(R_m) - R_f] \\ + \alpha^*_{2i}\ [E(R_2) - R_f] + \boldsymbol{\alpha}^*_{3i}\ [E(R_3) - R_f] \end{array} \tag{57}$$

En réarrangeant les termes, on trouve, $\forall i$, $i = [1, \ldots, N]$:

$$\alpha^*_{0i} = (1 - \alpha^*_{1i})\ R_f + \alpha^*_{2i}\,\phi + \boldsymbol{\alpha}^*_{3i}\varphi \tag{58}$$

avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = [E(R_2) - R_f] - E\left(\nu^2_m\right) \\ \varphi = [E(R_3) - R_f] - E\left(\nu^3_m\right) \end{array} \right.$$

Le MEA contraint l'ordonnée à l'origine des rentabilités des titres à être une combinaison linéaire des coefficients du modèle de marché cubique.

Il est alors possible, comme pour le MEDAF traditionnel, de tester le MEDAF à quatre moments avec cette restriction, ou, plus présicément la version du MEA à trois facteurs qui est compatible avec la relation du MEDAF étendue aux quatre premiers moments de la distribution de rentabilité. En effet, en réécrivant la relation d'évaluation des actifs financiers à quatre moments pour les portefeuilles dont les rendements sont ν_{mt}^2 et ν_{mt}^3, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} E\left(\nu_m^2\right)-R_f=\left[E\left(R_m\right)-E\left(R_{Z_1}\right)-E\left(R_{Z_2}\right)-R_f\right]\beta_{\nu_m^2} \\ \qquad +\left[E\left(R_{Z_1}\right)-R_f\right]\gamma_{\nu_m^2}+\left[E\left(R_{Z_2}\right)-R_f\right]\delta_{\nu_m^2} \\ E\left(\nu_m^3\right)-R_f=\left[E\left(R_m\right)-E\left(R_{Z_1}\right)-E\left(R_{Z_2}\right)-R_f\right]\beta_{\nu_m^2} \\ \qquad +\left[E\left(R_{Z_1}\right)-R_f\right]\gamma_{\nu_m^2}+\left[E\left(R_{Z_2}\right)-R_f\right]\delta_{\nu_m^2} \end{array}\right. \tag{59}$$

avec $\beta_{\nu_m^2}=Cov\left(\nu_m^2,R_m\right)/\sigma^2\left(R_m\right)$, $\beta_{\nu_m^3}=Cov\left(\nu_m^3,R_m\right)/\sigma^2\left(R_m\right)$, $\gamma_{\nu_m^2}=Cos\left(\nu_m^2,R_m\right)/m^3\left(R_m\right)$, $\gamma_{\nu_m^3}=Cos\left(\nu_m^3,R_m\right)/m^3\left(R_m\right)$, $\delta_{\nu_m^2}=Cok\left(\nu_m^2,R_m\right)/m^3\left(R_m\right)$ et $\delta_{\nu_m^3}=Cok\left(\nu_m^3,R_m\right)/m^3\left(R_m\right)$.

Puisque R_2 et R_3 sont aussi parfaitement corrélés avec ν_{mt}^2 et ν_{mt}^3 et que $E\left(R_2\right)<E\left(\nu_m^2\right)$ et $E\left(R_3\right)<E\left(\nu_m^3\right)$, on peut écrire les restrictions du MEDAF à quatre moments et du modèle de marché cubique comme :

$$\left\{\begin{array}{l} \left[E\left(R_2\right)-R_f\right]<\left[E\left(R_m\right)-E\left(R_{Z_1}\right)-E\left(R_{Z_2}\right)-R_f\right]\beta_{\nu_m^2} \\ \qquad +\left[E\left(R_{Z_1}\right)-R_f\right]\gamma_{\nu_m^2}+\left[E\left(R_{Z_2}\right)-R_f\right]\delta_{\nu_m^2} \\ \left[E\left(R_3\right)-R_f\right]<\left[E\left(R_m\right)-E\left(R_{Z_1}\right)-E\left(R_{Z_2}\right)-R_f\right]\beta_{\nu_m^3} \\ \qquad +\left[E\left(R_{Z_1}\right)-R_f\right]\gamma_{\nu_m^3}+\left[E\left(R_{Z_2}\right)-R_f\right]\delta_{\nu_m^3} \end{array}\right. \tag{60}$$

Par ailleurs, puisque par définition, les portefeuilles dont les rendements sont égaux à ν_{mt}^2 et à ν_{mt}^3 possèdent des bêtas nuls, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \pi_1=\left[E\left(R_2\right)-R_f\right]-\left[E\left(R_{Z_1}\right)-R_f\right]\gamma_{\nu_m^2} \\ \qquad -\left[E\left(R_{Z_2}\right)-R_f\right]\delta_{\nu_m^2}<0 \\ \pi_2=\left[E\left(R_3\right)-R_f\right]-\left[E\left(R_{Z_1}\right)-R_f\right]\gamma_{\nu_m^3} \\ \qquad -\left[E\left(R_{Z_2}\right)-R_f\right]\delta_{\nu_m^3}<0 \end{array}\right. \tag{61}$$

Les valeurs de marché de π_1 et π_2 donnent une borne supérieure, respectivement, à la prime d'asymétrie sur le portefeuille générant une rentabilité espérée de $E\left(R_2\right)$ et à la prime de *kurtosis* sur le portefeuille générant une rentabilité espérée de $E\left(R_3\right)$. Ces restrictions supplémentaires sont obtenues sous l'hypothèse que le MEDAF à quatre moments constitue le "vrai" modèle d'évaluation.

4 Conclusion

Dans cet article, nous avons rappelé les fondements théoriques qui sont nécessaires pour obtenir un modèle d'évaluation des actifs financiers basé sur les quatre premiers moments centrés. Les investisseurs sont supposés rationnels et ils maximisent une fonction d'utilité objectif qui ne dépend que des quatre premiers moments des distributions de rentabilités des actifs. En utilisant un théorème de séparation monétaire à deux fonds nous avons obtenu le modèle d'évaluation des actifs fiinanciers à quatre moments. Dans ce modèle, la rentabilité d'un actif est, comme dans le cadre traditionnel du MEDAF, une fonction du rendement du portefeuille de marché, mais la relation n'est alors plus linéaire.

En utilisant la théorie des choix de portefeuille dans un cadre non-gaussien, nous généralisons les relations du MEDAF à quatre moments proposées dans la littérature au cas où il n'existe pas d'actif sans risque. Nous établissons également le lien entre ce modèle et différents modèles de valorisation multifactoriels tel que le modèle de Black (1972), le MEDAF à trois moments, le modèle de marché cubique et le MEA de Ross (1976). Ces derniers conduisent à des restrictions différentes sur les paramètres implicites du MEDAF à quatre moments. Toutes ces restrictions doivent être maintenant vérifiées sur des données réelles. Un des avantages du MEDAF à quatre moment écrit sous la forme présentée est de permettre la pré-identification des facteurs.

Les fondations théoriques du MEDAF à quatre moments ayant été établies, notre prochaine étape consiste à envisager les relations que l'on peut obtenir dans un cadre conditionnel (Jondeau et Rockinger, 2000), avec horizon de placement variable (Hübner et Honhon, 2001) et dans un cadre multi-périodique (Wu, 1998). Ensuite, il restera à tester les restrictions obtenues sur plusieurs classes d'actifs : les actifs traditionnels et les placements alternatifs.

References

Adcock C. et K. Shutes (1999-a), "Portfolio Selection Based on the Multivariate Skew Normal Distribution", *Working Paper*, University of Bath, January 1999, 9 pages.

Adcock C. et K. Shutes (1999-b), "Fat Tails and The Capital Asset Pricing Model", *Working Paper*, University of Bath, February 1999, 28 pages.

Aggarwal R., R. Rao.et T. Hiraki (1989), "Skewness and Kurtosis in Japanese Equity Returns: Empirical Evidence", *Journal of Financial Research 12*, 253-261.

Alexander G. et A. Baptista (2000), "Economic Implications of Using a Mean-VaR Model for Portfolio Selection: A Comparison with Mean-Variance Analysis", *Working Paper*, University of Minnesota, 40 pages.

Amilon H. (1999), "Comparison of Mean-Variance and Exact Utility Maximisation in Stock Portfolio Selection", *Working Paper*, Lund University, 15 pages.

Arditti F. (1967), "Risk and the Required Return on Equity", *Journal of Finance 22*, March 1967, 19-36.

Arrow K. (1964), *Essays in the Theory of Risk Bearing*, North-Holland Publishing Compagny, Amsterdam-London.

Athayde G. et R. Flôres (1999), "Introducing Higher Moments in the CAPM: Some Basic Ideas", *Discussion Paper EPGE-FGV*, November 1999, 23 pages.

Athayde G. et R. Flôres (1999), "Portfolio Frontier with Higher Moments: the Undicovered Country", *Discussion Paper EPGE-FGV*, May 2000, 42 pages.

Barone-Adesi G. (1985), "Arbitrage Equilibrium with Skewed Asset Returns", *Journal of Financial and Quantitative Analysis 20*, September 1985, 299-311.

Barone-Adesi G., P. Gagliardini et G. Urga (2001), "Testing Homogeneity of Asset Pricing Models", *Working Paper*, City UniversityBusiness School, 26 pages.

Beckaert G., C. Erb, C. Harvey et T. Viskanta (1998), "Distributional Characteristics of Emerging Markets Returns and Asset Allocation", *Journal of Portfolio Management*, Winter 1998, 103-117.

Beedles W. et M. Simkowitz (1978), "Diversification in a Three-moment World", *Journal of Financial and Quantitative Analysis 13*, December 1978, 927-941.

Beedles W. et M. Simkowitz (1980), "Morphology of Asset Asymmetry", *Journal of Business 8*, December 1980, 457-468.

Benishay H. (1987), "A Fourth-degree Polynomial Utility Function and its Implications for Investor's Responses Toward Fourth Moments of the Wealth Distribution", *Journal of Accounting, Auditing and Finance 2*, 203-238.

Benishay H. (1989), "More Weigths to the Friedman-Savage Hypothesis: a Comment", *Journal of Accounting, Auditing and Finance 4*, 518-527..

Benishay H. (1992), "The Pratt-Arrow Requirement in a Fourth Degree Polynomial Utility Function", *Journal of Accounting, Auditing and Finance 7*, 97-115.

Bera A. et G. Premaratne (1999), "Modeling Asymmetry and Excess Kurtosis in Stock Return Data", *Working Paper*, Illinois University, 25 pages.

Berényi Z. (2001-a), "Accounting for Illiquidity and Non-normality of Returns in the Performance Assessment", *Working Paper*, University of Munich, June 2001, 42 pages.

Berényi Z. (2001-b), "Performance of Leveraged Asset Funds", *Working Paper*, University of Munich, June 2001, 42 pages.

Black F. (1972), "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing", *Journal of Business 7*, 444-454.

Black F. (1976), "Studies of Stock Price Volatility Changes", *Proceedings of the 1976's meeting of the Business and Economic Statistics Section*, American Statistical Association, 177-181.

Black F. (1993), "Beta and Return", *Journal of Portfolio Management*, Fall 1993, 8-18.

Brennan M. (1993), "Agency and Asset Pricing", *Unpublished Manuscript*, UCLA and London Business School.

Bollerslev T. (1986), "Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics 31*, 1986, 307-327.

Bollerslev T., R. Engle et J. Wooldridge (1988), "A Capital Asset Pricing Model with Time-varying Covariances", *Journal of Political Economy 96 (1)*, 1988, 116-131.

Brockett P. et Y. Kahane (1992), "Risk, Return, Skewness and Preference", *Management Science 38*, June 1992, 851-866.

Brockett P. et R. Garven (1998), "A Reexamination of the Relationship Between Preferences and Moments Orderings by Rational Risk Averse Investors", *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory 23*, December 1998, 127-137.

Brooks R. et R. Faff (1998), "A Test of a Two-factor APT based on the Quadratic Market Model: International Evidence", *Studies in Economics and Econometrics 22*, 1998, 65-76.

Cass D. et J. Stiglitz (1970), "The Structure of Investor Preferences and Asset Returns, and Separability in Portfolio Allocation: A Contribution to the Pure Theory of Mutual funds", *Journal of Economic Theory 2*, 122-160.

Chen C., S. Rahman et A. Chan (1992), "Cross-sectional Analysis of Mutual Fund's Market Timing and Security Selection Skill", *Journal of Business and Accounting 19*, 1992, 659-675.

Christie A. et A. Andrew (1982), "The Stochastic Behavior of Common Stocks Variances: Value, Leverage, and Interest Rate Effects", *Journal of Financial Economics 23*, 1982, 407-432.

Christie-David R. et M. Chaudry (2001), "Coskewness and Cokurtosis in Futures Markets", *Journal of Empirical Finance 8*, 2001, 55-81.

Chunhachinda P., K. Danpani, S. Hamid et A. Prakash (1997), "Portfolio Selection and Skewness: Evidence from International Stocks Markets", *Journal of Banking and Finance 21*, 1997, 143-167.

Corrado C. et T. Su (1996-a), "S&P 500 Index Option Tests of Jarrow and Rudd's Approximate Option Valuation Formula", *Journal of Futures Markets 16 (6)*, 611-629.

Corrado C. et T. Su (1996-b), "Skewness and Kurtosis in S&P 500 Index Returns Implied by Option Prices", *Journal of Financial Research* 19 (2), 175-192.

Cumby R. et J. Glen (1990), "Evaluating the Performance of International Mutual Funds", *Journal of Finance 45*, June 1990, 497-521.

Dacorogna M, U. Müller, O. Pictet et C. de Vries (1995), "The Distribution of Extremal Foreign Exchange Rate Returns in Extremely Large Data Sets", *Working Paper*, Erasmus University of Rotterdam.

Diacogiannis G. (1994), "Three-parameter Asset Pricing", *Managerial and Decision Economics 15*, 1994, 149-158.

Diacogiannis G. (1999), "A Three-dimensional Risk-return Relationship Based upon the Inefficiency of a Portfolio: Derivation and Implications", *The European Journal of Finance 5*, September 1999, 225-235.

Ederington L. (1995), "Mean-variance as an Approximation to Expected Utility Maximisation: Semi-Ex-Ante Results", *Working Paper 86-5*, Washington University.

Engle R. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica 50*, 987-1007.

Faff R. (1993), "An Empirical Test of Arbitrage Equilibrium with Skewed Asset Returns: Australian", *Asia Pacific Journal of Management 10*, 1993, 195-211.

Faff R., Y. Ho et L. Zhang (1998), "A GMM Test of the Three-moment CAPM in the Australian Equity Market", *Asia Pacific Journal of Finance 1*, May 1998, 45-60.

Fama E. et K. French (1992), "The Cross-section of Expected Stock Returns", *Journal of Finance 47*, March 1992, 427-465.

Fama E. (1963), "Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis", *Journal of Business 36*, 420-429.

Fama E. (1996), "Discounting under Uncertainty", *Journal of Business 69*, 415-428.

Fang H. et T. Lai (1997), "Co-kurtosis and Capital Asset Pricing", *Financial Review 32*, May 1997, 293-307.

Feller W. (1971), *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Volume II, John Wiley & Sons, New York.

Friedman M. et L. Savage (1948), "The Utility Analysis of Choices Involving Risk", *Journal of Political Economy 56*, 1952, 279-304.

Friend I. et R. Westerfield (1980), "Co-skewness and Capital Asset Pricing", *Journal of Finance 35*, September 1980, 897-913.

Gamba A. et F. Rossi (1998-a), "A Three-moment Based Portfolio Selection Model", *Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali 20*, 1998, 25-48.

Gamba A. et F. Rossi (1998-b), "Mean-Variance-Skewness Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets", *Ricerca Operativa 28*, Special Issue 1998, 5-46.

Golec J. et M. Tamarkin (1998), "Bettors Love Skewness, not Risk, at the Horse Track", *Journal of Political Economy 106*, 1998, 205-225.

Harvey C. et G. Zhou (1993), "International Asset Pricing with Alternative Distributional Specifications", *Journal of Empirical Finance 1*, 1993, 107-131.

Harvey C. et S. Siddique (1999), "Autoregressive Conditional Skewness", *Journal of Financial and Quantitative Analysis 34 (4)*, 1999, 465-487.

Harvey C. et S. Siddique (2000-a), "Conditional Skewness in Asset Pricing Tests", *Journal of Finance 54*, June 2000, 1263-1296.

Harvey C. et S. Siddique (2000-b), "Time-Varying Conditional Skewness and the Market Risk Premium", *Research in Banking and Finance 1*, 25-58.

Hill B. (1975), "A Simple General Approach to Inference About Tail of a Distribution", The Annal of Statistics 3, 1163-1174.

Homaifar G. et D. Graddy (1988), "Equity Yields in Models Considering Higher Moments of the Return Distribution", *Applied Economics 20*, 325-334.

Hwang S. et S. Satchell (1999), "Modelling Emerging Market Risk Premia Using Higher Moments", *International Journal of Finance and Economics 4 (4), 1*999, 271-296.

Hübner G. et D. Honhon (2001), "Equilibrium Asset Pricing with Nonparametric Horizon Risk", *Working Paper*, University of Liège, 24 pages.

Ingersoll J. (1987), *Theory of Financial Decision Making, Rowman & Littlefield*, Totowa, 474 pages.

Jagannathan R. and Z. Wang (1996), "The Conditional CAPM and the Cross-section of Expected Returns", *Journal of Finance 51*, March 1996, 3-53.

Jansen D. et C. de Vries (1991), "On the Frequency of Large Stock Returns: Putting Booms and Busts Into Perspective", *Review of Economics and Statistics*, 171-175.

Jarrow R. et A. Rudd (1982), "Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics 10*, 1982, 347-369.

Jondeau E. et M. Rockinger (1999), "The Tail Behaviour of Stock Returns: Emerging versus Mature Markets", *Working Paper*, HEC, June 1999, 58 pages.

Jondeau E. et M. Rockinger (2000), “Conditional Volatility, Skewness and Kurtosis: Existence and Persistence”, *Working Paper*, HEC, July 2000, 48 pages.

Jurczenko E. et B. Maillet (2001), “The 3-CAPM: Theoretical Foundations and an Asset Pricing Model Comparison in a Unified Framework”, *Developments in Forecast Combination and Portfolio Choice*, Dunis C. A. Timmermann and J. Moody eds, John Wiley&Sons, 239-273.

Jurczenko E., B. Maillet et B. Negrea (2002), “Multi-moment Approximate Option Pricing Models: A General Comparison (Part 1)”, *Working Paper*, Université de Paris 1, 54 pages.

Kane A. (1982), “Skewness Preference and Portfolio Choice”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis 17*, September 1982, 15-25.

Kahneman D. et A. Tversky (1979), “Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk”, *Econometrica 47*, 263-291.

Kendall M. and A. Stuart, (1977), *The Advanced Theory of Statistics*, Fourth Edition, Vol. 1, Macmillan Publishing Company, New York.

Kimball M. (1990), “Standard Risk Aversion”, *Econometrica 61 (3)*, January 1993, 589-573.

Kimball M. (1993), “Precautionary Saving in the Small and in the Large”, *Econometrica 58*, January 1990, 53-73.

Kraus A. et R. Litzenberger (1976), ”Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets”, *Journal of Finance 31*, September 1976, 1085-1099.

Kraus A. et R. Litzenberger (1983), “On the Distributional Conditions for a Consumption-oriented Three-moment CAPM”, *Journal of Finance 38*, December 1983, 1381-1391.

Kroll Y., H. Levy et H. Markowitz (1984), “Mean Variance versus Direct Utility Maximisation”, *Journal of Finance 39*, March 1984, 47-61.

Lai T. (1991), “Portfolio Selection with Skewness: A Multiplicative-objective Approach”, *Review of Quantitative Finance and Accounting 1*, 293-305.

Lhabitant F. (1997), “On the (Ab)use of Expected Utility Approximations for Portfolio Selection and Portfolio Performance”, *Working Paper,* University of Lausanne, April 1997, 23 pages.

Lee C. et S. Rhaman (1990), “Market Timing, Selectivity, and Mutual Fund Performance: An Empirical Investigation”, *Journal of Business 42*, 1990, 261-278.

Lehman B. et D. Modest (1987), “Mutual Fund Performance Evaluation: A Comparison of Benchmarks and Benchmark Comparisons”, *Journal of Finance 42*, 1987, 233-265.

Levy H. (1969), “An utility Function Depending on the First Three Moments”, *Journal of Finance 24*, September 1969, 715-719.

Levy H. et H. Markowitz (1979), “Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance”, *American Economic Review 69*, June 1979, 308-317.

Lim K. (1989), “A New Test of the Three-moment Capital Asset Pricing Model”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis 24*, June 1989, 205-216.

Lintner J. (1965), "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", *Review of Economic and Statistics 13*, 13-37.

Loistl O. (1976), "The Erroneous Approximation of Expected Utility by Means of a Taylor's Series Expansion: Analytic and Computational Results", *American Economic Review 66*, December 1976, 905-910.

Longin F. (1996), "The Asymptotics Distribution of Extreme Stock Market Returns", *Journal of Business 69*, 383-408.

Loretan M. et P. Phillips (1994), "Testing the Covariance Stationarity of Heavily Tailed Time Series: An Overview of the Theory with Applicationsto Several Financial Data Sets", *Journal of Emprical Finance 1*, 211-248.

Madan D. et F. Milne (1994), "Contingent Claims Valued and Hedged by Pricing and Investing in a Basis", *Mathematical Finance 4*, 1994, 223-245.

Mandelbrot B. (1963), "The Vaiation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business 35*, 1963, 394-419.

Mandelbrot B. (1997), *Fractals and Scaling in Finance*, Springer, New-York, 1997, 551 pages.

Markowitz H. (1952), "Portfolio Selection", *Journal of Finance 7*, 1952, 77-91.

Markowitz H. (1991), "Foundations of Portfolio Theory", *Journal of Finance 46*, June 1991, 469-477.

Mills T. (1995), "Modelling Skewness and Kurtosis in the London Stock Exchange FT-SE Index Return Distributions", *Statistician* 44 (3), 323-332.

Mossin J. (1966), "Equilibrium in a Capital Market", *Econometrica 34*, October 1966, 768-83.

Nantell T., B. Price et K. Price (1982), "Variance and Lower Partial Moments Measures of Systematic Risk: Some Analytical and Empirical Results", *Journal of Finance 37*, June 1982, 843-855.

Nummelin K. (1995), "Global Coskewness and Swedish Stock Returns", *Meddelanden Working Papers 311*, Swedish School of Economics and Business Administration, 20 pages.

Okunev J. (1990), "An Alternative Measure of Mutual Fund Performance", *Journal of Business, Finance and Accounting 17 (2)*, Spring 1990, 247-264.

Omran M. (1997), "Moment Condition Failure in Stock Returns, UK evidence", *Applied Mathematical Finance 4*, 201-206.

Pedersen C. et S. Satchell (1998), "An Extended Family of Financial Risk Measures", *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory 23*, 89-117.

Pedersen C. et S. Satchell (2001), "Asymmetric Equilibrium Risk Measures", *Journal of Empirical Finance*, 2001, forthcoming.

Peiro A. (1999), "Skewness in Financial Returns", *Journal of Banking and Finance 23*, 847-862.

Peiro A. (2000), "Skewness in Individual Stocks at Different Frequencies", *Working Paper*, University of Valencia, 19 pages.

Perez-Quiro G. et A. Timmerman (2001), "Business Cycle Asymetries in Stock Returns: Evidence for Higher Orders Moments and Conditional Densities", *ECB Working Paper 58*, April 2001, 46 pages.

Prakash A., C. Chang et S. Hamid (1996), "Why a Decision Maker May Prefer a Seemingly Unfair Gamble", *Decision Sciences 27*, Spring 1996, 239-253.

Pratt J. (1964), "Risk Aversion in the Small and the Large", *Econometrica 32*, January 1964, 122-136.

Racine M. (1998), "Asset Valuation and Coskewness in Canada", *Working Paper Series 9802*, University of Wilfrid Laurier, 34 pages.

Rachev S. et S. Mittnik (2000), *Stable Paretian Models in Finance Series*, Financial Economics and Quantitative Analysis Series, John Wiley & Sons, 855 pages.

Ross S. (1976), "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing Theory", *Journal of Economic Theory 13*, 1976, 341-360.

Rossi G. et L. Tibiletti (1996), "Higher Order Polynomial Utility Functions: Advantages in their Use", *Working Paper*, Dipartimento Di Statistica e Matematica Applicata Alle Scienze Umane Quaderno 1, Universita Degli Studi Di Torino, 13 pages.

Rubinstein M. (1973), "The Fundamental Theorem of Parameter-preference Security Valuation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis 8*, January 1973, 61-69.

Samorodnitsky G. et M. Taqqu (1994), *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman and Hall, New-York, London..

Samuelson P. (1970), "The Fundamental Approximation Theorem of Portfolio Analysis in Terms of Means, Variances and Higher Moments", *Review of Economic Studies 37*, October 1970, 537-543.

Sanchez-Torres P. et E. Sentana (1998), "Mean-Variance-Skewness Analysis: An Application to Risk Premia in the Spanish Stock Market", *Investigaciones Economicas 22*, 5-17.

Scott R. et P. Horvath (1980), "On the Direction of Preference for Moments of Higher Order than the Variance", *Journal of Finance 35*, September 1985, 915-919.

Sears R. et K. Wei (1985), "Asset Pricing, Higher Moments, and the Market Risk Premium: A Note", *Journal of Finance 40*, September 1985, 1251-1253.

Sears R. et K. Wei (1988), "The Structure of Skewness Preferences in Asset Pricing Models with Higher Moments: An Empirical Test", *Financial Review 23*, February 1988, 25-38.

Sharpe W. (1964), "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", *Journal of Finance 19*, September 1964, 425-442.

Simaan Y. (1993), "Portfolio Selection and Asset Pricing Three Parameter Framework", *Management Science 5*, May 1993, 568-577.

Simaan Y. (1997), "What is the Opportunity Cost of Mean-variance Investment Strategies", *Management Science 5*, May 1993, 578-587.

Tang G. (1996), "Day-of-the-week Effect on Skewness and Kurtosis: A direct test and Portfolio Effect", *European Journal of Finance (2)*, 1996, 333-351.

Theodossiou P. (1998), "Financial Data and the Skewed Generalized T Distribution", *Management Science 44 (12)*, 1998, 1650-1661.

Treynor J. et F. Mazuy (1966), “Can Mutual Funds Outguess the Market”, *Harvard Business Review 44*, 1966, 131-136.

Tsiang S. (1972), “The Rationale of the Mean-Standard Deviation Analysis, Skewness Preference, and the Demand for Money”, *American Economic Review 62*, 354-371.

von Neuman J. et O. Morgenstern (1947), *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press, Princeton, New-Jersey.

Annexe 1 :

Suivant Diacogiannis (1994), l'asymétrie et la *kurtosis* de la distribution de rentabilité d'un portefeuille peuvent s'écrire comme une moyenne pondérée respectivement des coasymétries et des *cokurtosis* des rentabilités des N titres composant ce portefeuille, c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} m^3\left(R_p\right) = \sum_{i=1}^{N} w_i \, Cos\left(R_i, R_p\right) \\ \square^4\left(R_p\right) = \sum_{i=1}^{N} w_i \, Cos\left(R_i, R_p\right) \end{array} \right. \tag{A.1.1.}$$

Démonstration : la coasymétrie et la *cokurtosis* entre les rentabilités d'un titre i et un portefeuille p sont donnés respectivement par :

$$\left\{ \begin{array}{l} Cos\left(R_i, R_p\right) = E\left\{\left[R_i - E\left(R_i\right)\right]\left[R_p - E\left(R_p\right)\right]^2\right\} \\ Cok\left(R_i, R_p\right) = E\left\{\left[R_i - E\left(R_i\right)\right]\left[R_p - E\left(R_p\right)\right]^3\right\} \end{array} \right. \tag{A.1.2.}$$

En développant respectivement le carré et le cube et en réarrangeant, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} Cos\left(R_i, R_p\right) = E\left(R_i \, R_p^2\right) - E\left(R_i\right) \, E\left(R_p^2\right) \\ \qquad\qquad - 2\, E\left(R_p\right)\left[E\left(R_i \, R_p\right) - E\left(R_i\right) \, E\left(R_p\right)\right] \\ Cok\left(R_i, R_p\right) = E\left(R_i \, R_p^3\right) - E\left(R_i\right) \, E\left(R_p^3\right) \\ \qquad\qquad - 3\, E\left(R_p\right) \, \left[E\left(R_i \, R_p^2\right) - E\left(R_i\right) \, E\left(R_p^2\right)\right] \\ \qquad\qquad + 3\, \left[E\left(R_p\right)\right]^2 \left[E\left(R_i \, R_p\right) - E\left(R_i\right) \, E\left(R_p\right)\right] \end{array} \right. \tag{A.1.3.}$$

Ce système d'équations est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} Cos\left(R_i, R_p\right) = Cov\left(R_i, R_p^2\right) - 2\, E\left(R_p\right) \, Cov\left(R_i, R_p\right) \\ Cok\left(R_i, R_p\right) = Cov\left(R_i, R_p^3\right) - 3\, E\left(R_p\right) \, Cov\left(R_i, R_p^2\right) \\ \qquad\qquad + 3\, E\left[\left(R_p\right)\right]^2 \, Cov\left(R_i, R_p\right) \end{array} \right. \tag{A.1.4.}$$

L'asymétrie et la *kurtosis* du rendement d'un portefeuille p sont respectivement donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} m^3\left(R_p\right) = E\left(R_p^3\right) - 3\, E\left(R_p^2\right) \, E\left(R_p\right) \\ \qquad\qquad + 2\, \left[E\left(R_p\right)\right]^3 \\ \square^4\left(R_p\right) = E\left(R_p^4\right) - 4\, E\left(R_p^3\right) \, E\left(R_p\right) \\ \qquad\qquad + 6\, E\left(R_p^2\right) \, \left[E\left(R_p\right)\right]^2 - 3\, \left[E\left(R_p\right)\right]^4 \end{array} \right. \tag{A.1.5.}$$

En utilisant la définition de la variance et la propriété de bilinéarité de l'opérateur de covariance, le système d'équation (A.1.5.) peut se simplifier ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} m^3\left(R_p\right) = Cov\left(R_p, R_p^2\right) - 2\, E\left(R_p\right) \, \sigma^2\left(R_p\right) \\ \square^4\left(R_p\right) = Cov\left(R_p, R_p^3\right) - 3\, E\left(R_p\right) \, Cov\left(R_p, R_p^2\right) \\ \qquad\qquad + 3\, E\left[\left(R_p\right)\right]^2 \, \sigma^2\left(R_p\right) \end{array} \right. \tag{A.1.6.}$$

En réarrangeant (A.1.6.) et en utilisant les résultats précédents, on trouve alors que :

$$\left\{\begin{array}{l} m^3\left(R_p\right)=\sum_{i=1}^N w_i\left[Cov\left(R_i, R_p^2\right)-2\,E\left(R_p\right)\,Cov\left(R_i, R_p\right)\right] \\ \square^4\left(R_p\right)=\sum_{i=1}^N w_i\left[Cov\left(R_i, R_p^3\right)-3\,E\left(R_p\right)\,Cov\left(R_i, R_p^2\right)\right. \\ \qquad\qquad\qquad\left.+3\,E\left[\left(R_p\right)\right]^2\,Cov\left(R_i, R_p\right)\right] \end{array}\right. \tag{A.1.7.}$$

soit :

$$\left\{\begin{array}{l} m^3\left(R_p\right)=\mathbf{w}_p^{\prime}\,\Sigma_p \\ \square^4\left(R_p\right)=\mathbf{w}_p^{\prime}\,\Gamma_p \end{array}\right. \tag{A.1.8.}$$

où $\mathbf{w}_p^{\prime}$ est le vecteur des proportions des titres investis dans le portefeuille p de dimension $(1 \times N)$, Σ_p est le vecteur de coasymétrie des rentabilités des N actifs risqués avec le rendement du portefeuille p de dimension $(N \times 1)$ et Γ_p est le vecteur de *cokurtosis* des rentabilités des N actifs risqués avec le rendement du portefeuille p de dimension $(N \times 1)$.

Annexe 2 :

Les conditions du premier ordre du problème de choix de portefeuille de l'agent sont suffisantes pour déterminer un *maximum* puisque la matrice hessienne de la fonction d'utilitée espérée par rapport à $\mathbf{w}_p^{\prime}$ est définie négative.

Démonstration : la dérivée partielle seconde de l'utilité espérée de l'investisseur par rapport à $w_i$et à w_j, donne :

$$\frac{\partial^2 E\left[U\left(R_p\right)\right]}{\partial w_i\,\partial w_j}=E\left[U^{(2)}\left(R_p\right)\,R_i\,R_j\right] \tag{A.2.1.}$$

avec $(i, j)=[1, \ldots, N]^2$.

La matrice hessienne $\mathbf{H}$ de dimension $(N \times N)$ de la fonction d'utilité espérée est donnée par :

$$\mathbf{H}=E\left[U^{(2)}\left(R_p\right)\left(\begin{array}{cccc} R_1^2 & R_1 R_2 & \cdots & R_1 R_N \\ R_1 R_2 & R_2^2 & \cdots & R_2 R_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1 R_N & R_2 R_N & \cdots & R_N^2 \end{array}\right)\right] \tag{A.2.2.}$$

En prémultipliant et en postmultipliant (A.2.2.) par $\mathbf{w}_p^{\prime}$ on obtient la forme quadratique suivante :

$$\begin{aligned} Q &= \mathbf{w}_p^{\prime}\,\mathbf{H}\,\mathbf{w}_p \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j\,E\left[U^{(2)}\left(R_p\right)\,R_i\,R_j\right] \\ &= E\left[U^{(2)}\left(R_p\right)\left(\sum_{i=1}^N w_i R_i\right)^2\right] \end{aligned} \tag{A.2.3.}$$

qui est négative puisque, par définition, les investisseurs sont averses au risque, *i.e.* : $U^{(2)}(R_p) < 0$. La matrice hessienne est donc définie négative et la condition de concavité est remplie.

Annexe 3 :

Les dérivées premières de l'asymétrie et de la *kurtosis* de la rentabilité d'un portefeuille par rapport à $\mathbf{w}_p^{'}$, sont respectivement égales à trois fois le vecteur de cosasymétrie et à quatre fois le vecteur de *cokurtosis*, soient :

$$\begin{cases} \frac{\partial m^3(R_p)}{\partial \mathbf{w}_p^{'}} = 3\,\Sigma_p \\ \frac{\partial \square^4(R_p)}{\partial \mathbf{w}_p^{'}} = 4\,\Gamma_p \end{cases} \tag{A.3.1.}$$

Démonstration : le moment centré d'ordre n de la rentabilité d'un portefeuille p est donné par :

$$\begin{aligned} \mu_n(R_p) &= E\{[R_p - E(R_p)]^n\} \\ &= E\left\{\left[\sum_{i=1}^{N} w_i (R_i - E(R_i))\right]^n\right\} \end{aligned} \tag{A.3.2.}$$

En prenant la dérivée première du moment centré d'ordre n de la rentabilité du portefeuille p par rapport à w_{pi}, la *i-ème* composante du vecteur $\mathbf{w}_p^{'}$ de dimension $(1 \times N)$, on obtient :

$$\frac{\partial \mu_n(R_p)}{\partial w_i} = n\,E\left\{[R_i - E(R_i)]\,[R_p - E(R_p)]^{(n-1)}\right\} = n\,C_n(R_i, R_p) \tag{A.3.3.}$$

où $C_n(R_i, R_p)$ est le comoment centré d'ordre n entre la rentabilité de l'actif i et le rendement du portefeuille p de l'investisseur.

Ce qui conduit, dans le cas vectoriel, à :

$$\frac{\partial \mu_n(R_p)}{\partial \mathbf{w}_p^{'}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mu_n(R_p)}{\partial w_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mu_n(R_p)}{\partial w_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\,C_n(R_1, R_p) \\ \vdots \\ n\,C_n(R_1, R_p) \end{pmatrix} = n\,\mathbf{C}_{np} \tag{A.3.4.}$$

où $\mathbf{C}_{np}$ est le vecteur des comoments d'ordre n des rentabilités des N actifs risqués avec le rendement du portefeuille p, de dimension $(N \times 1)$.

Pour $n = 3$, on trouve alors :

$$\frac{\partial m^3(R_p)}{\partial \mathbf{w}_p^{'}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial m^3(R_p)}{\partial w_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial m^3(R_p)}{\partial w_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,Cos(R_1, R_p) \\ \vdots \\ 3\,Cos(R_1, R_p) \end{pmatrix} = 3\,\Sigma_p \tag{A.3.5.}$$

Pour $n = 4$, il vient :

$$\frac{\partial \square^4 (R_p)}{\partial \mathbf{w}_p'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \square^4 (R_p)}{\partial w_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \square^4 (R_p)}{\partial w_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,Cok\,(R_1, R_p) \\ \vdots \\ 4\,Cok\,(R_1, R_p) \end{pmatrix} = 4\Gamma_p \qquad \text{(A.3.6.)}$$

Annexe 4 :

Lorsque les distributions de rentabilités individuelles sont asymétriques et leptokurtiques, le vecteur des poids relatifs des actifs de n'importe quel portefeuille est une combinaison linéaire des vecteurs de poids des quatre fonds distincts suivants :

$$\mathbf{w}_{a_1} = \frac{{}^{-1}\mathbf{E}}{\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\mathbf{E}}, \quad \mathbf{w}_{a_2} = \frac{{}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\mathbf{1}}, \quad \mathbf{w}_{a_3} = \frac{{}^{-1}\Sigma_p}{\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\Sigma_p}, \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_{a_4} = \frac{{}^{-1}\Gamma_p}{\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\Gamma_p} \qquad \text{(A.4.1.)}$$

Démonstration : la solution du programme de choix de portefeuille de l'investisseur est obtenue en formant le Lagrangien suivant :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \frac{1}{2}\mathbf{w}_p' \quad \mathbf{w}_p + \delta_1 \left[E(R_p) - \mathbf{w}_p'\mathbf{E}\right] + \delta_2 \left[1 - \mathbf{w}_p'\mathbf{1}\right] \qquad \text{(A.4.2.)} \\ &\quad + \frac{\delta_3}{3}\left[m^3(R_p) - \mathbf{w}_p'\Sigma_p\right] + \frac{\delta_4}{4}\left[\square^4(R_p) - \mathbf{w}_p'\Gamma_p\right] \end{aligned}$$

où δ_1, δ_2, δ_3 et δ_4 sont les coefficients de Lagrange.

Les conditions du premier ordre sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial\, \mathfrak{L}}{\partial\ \mathbf{w}_p'} = \quad \mathbf{w}_p - \delta_1\mathbf{E} - \delta_2\mathbf{1} - \delta_3\Sigma_p - \delta_4\Gamma_p \\ \frac{\partial\, \mathfrak{L}}{\partial\, \delta_1} = E(R_p) - \mathbf{w}_p'\mathbf{E} \\ \frac{\partial\, \mathfrak{L}}{\partial\, \delta_2} = 1 - \mathbf{w}_p'\mathbf{1} \\ \frac{\partial\, \mathfrak{L}}{\partial\, \delta_3} = m^3(R_p) - \mathbf{w}_p'\Sigma_p \\ \frac{\partial\, \mathfrak{L}}{\partial\, \delta_4} = \square^4(R_p) - \mathbf{w}_p'\Gamma_p \end{cases} \qquad \text{(A.4.3.)}$$

En prémultipliant (A.4.2.) par le matrice inverse de , et en réarrangeant les termes on obtient :

$$\mathbf{w}_p = \delta_1 \quad {}^{-1}\mathbf{E} + \delta_2 \quad {}^{-1}\mathbf{1} + \delta_3 \quad {}^{-1}\Sigma_p + \delta_4 \quad {}^{-1}\Gamma_p \qquad \text{(A.4.4.)}$$

soit :

$$\mathbf{w}_p = \lambda_1 \frac{{}^{-1}\mathbf{E}}{\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\mathbf{E}} + \lambda_2 \frac{{}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\mathbf{1}} + \lambda_3 \frac{{}^{-1}\Sigma_p}{\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\Sigma_p} + \lambda_4 \frac{{}^{-1}\Gamma_p}{\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\Gamma_p} \qquad \text{(A.4.5.)}$$

avec :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \delta_1\, \mathbf{1}' \quad {}^{-1}\mathbf{E} \\ \lambda_2 = \delta_2\, \mathbf{1}' \quad {}^{-1}\mathbf{1} \\ \lambda_3 = \delta_3\, \mathbf{1}' \quad {}^{-1}\Sigma_p \\ \lambda_4 = \delta_4\, \mathbf{1}' \quad {}^{-1}\Gamma_p \end{cases}$$

et :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$$

Annexe 5 :

Lorsqu'il existe un actif sans risque, le vecteur des poids des actifs de tout portefeuille efficient est une combinaison linéaire des vecteurs de poids de l'actif sans risque et des trois fonds risqués suivants :

$$\mathbf{w}_{a_5} = \frac{{}^{-1}\left(\mathbf{E} - R_f\,\mathbf{1}\right)}{\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\left(\mathbf{E} - R_f\,\mathbf{1}\right)}, \quad \mathbf{w}_{a_6} = \frac{{}^{-1}\Sigma_p}{\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\Sigma_p} \text{ et } \quad \mathbf{w}_{a_7} = \frac{{}^{-1}\Gamma_p}{\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\Gamma_p} \qquad \text{(A.5.1.)}$$

Démonstration : si l'on introduit un actif sans risque, le programme de l'investisseur devient :

$$\underset{\mathbf{w}_p'}{Min} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{w}_p' \quad \mathbf{w}_p \right\} \qquad \text{(A.5.2.)}$$

$$s.t. \begin{cases} \mathbf{w}_p'\mathbf{E} + \left(1 - \mathbf{w}_p'\mathbf{1}\right) R_f = E\left(R_p\right) \\ \mathbf{w}_p'\Sigma_p = m^3\left(R_p\right) \\ \mathbf{w}_p'\Gamma_p = \square^4\left(R_p\right) \end{cases}$$

En adoptant la même approche que précédemment, on obtient alors :

$$\mathbf{w}_p = \delta_1' \quad {}^{-1}\left(\mathbf{E} - R_f\mathbf{1}\right) + \delta_2' \quad {}^{-1}\Sigma_p + \delta_3' \quad {}^{-1}\Gamma_p \qquad \text{(A.5.3.)}$$

où δ_1', δ_2' et δ_3' sont les coefficients de Lagrange.

Soit encore :

$$\mathbf{w}_p = \lambda_5 \frac{{}^{-1}\left(\mathbf{E} - R_f\mathbf{1}\right)}{\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\left(\mathbf{E} - R_f\mathbf{1}\right)} + \lambda_6 \frac{{}^{-1}\Sigma_p}{\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\Sigma_p} + \lambda_7 \frac{{}^{-1}\Gamma_p}{\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\Gamma_p}$$

avec :

$$\begin{cases} \lambda_5 = \delta_1'\,\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\left(\mathbf{E} - R_f\mathbf{1}\right) \\ \lambda_6 = \delta_2'\,\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\Sigma_p \\ \lambda_7 = \delta_2'\,\mathbf{1}' \quad {}^{-1}\Gamma_p \end{cases}$$

et :

$$w_{a_8} = 1 - \mathbf{w}_p'\mathbf{1} = 1 - \lambda_5 - \lambda_6 - \lambda_7$$

Annexe 6 :

En l'absence d'un actif sans risque, la relation du MEDAF à quatre moments peut s'écrire comme suit :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} - E\left(R_{Z_0}\right)\mathbf{1} \quad = \quad & \left\{\left[E\left(R_p\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] - \left[E\left(R_{Z_1}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right]\right. \\
& \left. - \left[E\left(R_{Z_2}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right]\right\} \quad \mathbf{w}_p \left[\sigma^2\left(R_p\right)\right]^{-1} \\
& + \left[E\left(R_{Z_1}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] \Sigma_p \left[m^3\left(R_p\right)\right]^{-1} \\
& + \left[E\left(R_{Z_2}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] \Gamma_p \left[\square^4\left(R_p\right)\right]^{-1}
\end{aligned}
\tag{A.6.1.}
$$

Démonstration : le vecteur de dimension $(N \times 1)$ des covariances entre la rentabilité du portefeuille p et les N rentabilités des actifs risqués s'écrit $\mathbf{w}_p$. Par conséquent, en utilisant la première équation dans (A.4.3.) l'on obtient :

$$
\mathbf{w}_p = \delta_1\,\mathbf{E} + \delta_2\,\mathbf{1} + \delta_3\,\Sigma_p + \delta_3\,\Gamma_p \tag{A.6.2.}
$$

ce qui peut se réécrire, si l'on suppose que $\delta_1 \neq 0$ (*i.e.* la contrainte de variance est saturée), comme :

$$
\mathbf{E} = \theta_{p_1} \quad \mathbf{w}_p + \theta_{p_2}\mathbf{1} + \theta_{p_3}\Sigma_p + \theta_{p_4}\,\Gamma_p \tag{A.6.3.}
$$

où :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\theta_{p_1} = \left(\delta_1\right)^{-1} \\
\theta_{p_2} = -\left(\delta_2/\delta_1\right) \\
\theta_{p_3} = -\left(\delta_3/\delta_1\right) \\
\theta_{p_4} = -\left(\delta_4/\delta_1\right)
\end{array}
\right.
$$

Afin de déterminer la valeur des paramètres θ_{p_1},θ_{p_2}, θ_{p_3} et θ_{p_4}, on prémultiplie alors (A.6.2.) par les vecteurs transposés $\mathbf{w}_p^{'}$, $\mathbf{w}_{Z_0}^{'}$, $\mathbf{w}_{Z_1}^{'}$ et $\mathbf{w}_{Z_2}^{'}$ qui correspondent, respectivement, au vecteur des poids de dimension $(N \times 1)$ du portefeuille p efficient; au vecteur des poids de dimension $(N \times 1)$ du portefeuille Z_0 dont les rentabilités sont non-corrélées avec le rendement du portefeuille p et qui possède une coasymétrie et une *cokurtosis* nulles avec ce dernier, au vecteur des poids de dimension $(N \times 1)$ du portefeuille Z_1 dont les rentabilités sont non-corrélées avec le rendement du portefeuille p et qui possède une coasymétrie relative unitaire et une *cokurtosis* nulle avec ce portefeuille[43], et au vecteur des poids de dimension $(N \times 1)$ du portefeuille Z_2 dont les rentabilités sont non-corrélées avec le rendement du portefeuille p et qui possède une coasymétrie nulle et une *cokurtosis* relative unitaire avec ce dernier[44]. On obtient ainsi :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
E\left(R_p\right) = \theta_{p_1}\,\boldsymbol{\sigma}^2\left(R_p\right) + \theta_{p_2} + \theta_{p_3}\,m^3\left(R_p\right) + \theta_{p_4}\,\square^4\left(R_p\right) \\
E\left(R_{Z_0}\right) = \theta_{p_2} \\
E\left(R_{Z_1}\right) = \theta_{p_2} + \theta_{p_3}\,m^3\left(R_p\right) \\
E\left(R_{Z_2}\right) = \theta_{p_2} + \theta_{p_4}\,\square^4\left(R_p\right)
\end{array}
\right.
\tag{A.6.4.}
$$

[43] Soit : $Cos\left(R_p, R_{Z_1}\right) = m^3\left(R_p\right)$
[44] Soit : $Cok\left(R_p, R_{Z_2}\right) = \square^4\left(R_p\right)$

La résolution de ce système pour θ_{p1}, θ_{p2}, θ_{p3} et θ_{p4} donne :

$$\begin{cases} \theta_{p_1} = \left\{ \frac{\left[E(R_p)-E\left(R_{Z_0}\right)\right]-\left[E\left(R_{Z_1}\right)-E\left(R_{Z_0}\right)\right]-\left[E\left(R_{Z_2}\right)-E\left(R_{Z_0}\right)\right]}{\sigma^2(R_p)} \right\} \\ \theta_{p_2} = E\left(R_{Z_0}\right) \\ \theta_{p_3} = \frac{\left[E\left(R_{Z_1}\right)-E\left(R_{Z_0}\right)\right]}{m^3(R_p)} \\ \theta_{p_4} = \frac{\left[E\left(R_{Z_2}\right)-E\left(R_{Z_0}\right)\right]}{\square^4(R_p)} \end{cases} \tag{A.6.5.}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (A.6.3.) on parvient alors au résultat désiré.

Annexe 7 :

En absence d'un actif sans risque, les primes de risque d'un équilibre *Pareto*-optimal sont données par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} - E\left(R_{Z_0}\right)\mathbf{1} \quad = \quad & \left\{\left[E\left(R_m\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] - \left[E\left(R_{Z_1}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right]\right. \\ & \left. - \left[E\left(R_{Z_2}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right]\right\} \boldsymbol{\beta} \qquad \text{(A.7.1.)} \\ & + \left[E\left(R_{Z_1}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] \boldsymbol{\gamma} + \left[E\left(R_{Z_2}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] \boldsymbol{\delta} \end{aligned}$$

Démonstration : l'étude des propriétés de la frontière efficiente moyenne-variance-asymétrie-*kurtosis* a permis de montrer que tout portefeuille efficient p - qui n'appartient pas à l'ensemble variance-asymétrie-*kurtosis* efficient - doit vérifier l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} - E\left(R_{Z_0}\right)\mathbf{1} \quad = \quad & \left\{\left[E\left(R_p\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] - \left[E\left(R_{Z_1}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right]\right. \\ & \left. - \left[E\left(R_{Z_2}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right]\right\} \quad \mathbf{w}_p \left[\sigma^2\left(R_p\right)\right]^{-1} \qquad \text{(A.7.2.)} \\ & + \left[E\left(R_{Z_1}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] \Sigma_p \left[m^3\left(R_p\right)\right]^{-1} \\ & + \left[E\left(R_{Z_2}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] \Gamma_p \left[\square^4\left(R_p\right)\right]^{-1} \end{aligned}$$

avec $\left\{\left[E\left(R_p\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] - \left[E\left(R_{Z_1}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] - \left[E\left(R_{Z_2}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] / \sigma^2\left(R_p\right)\right\} > 0$, $\left\{\left[E\left(R_{Z_1}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] / m^3\left(R_p\right)\right\} < 0$ et $\left\{\left[E\left(R_{Z_2}\right) - E\left(R_{Z_0}\right)\right] / \square^4\left(R_p\right)\right\} > 0$; où $E\left(R_p\right)$ est le taux de rentabilité espérée du portefeuille efficient p et $E\left(R_{Z_0}\right)$, $E\left(R_{Z_1}\right)$ et $E\left(R_{Z_2}\right)$ sont les taux de rentabilités espérées de portefeuilles non-corrélés avec le portefeuille p, caractérisés respectivement par une coasymétrie et une *cokurtosis* nulle avec ce dernier, une coasymétrie relative unitaire et une *cokurtosis* nulle avec le portefeuille p et une coasymétrie nulle et une *cokurtosis* relative unitaire avec le portefeuille efficient considéré.

Nous avons établi précédemment que le portefeuille de marché est efficient lorsqu'il existe une allocation d'équilibre *Pareto*-optimale. Par conséquent, pour obtenir la relation (A.7.1.), il suffit de montrer que le portefeuille de marché n'appartient pas à la frontière des portefeuilles variance-asymétrie-*kurtosis* efficients. Cette condition est toujours vérifiée, à moins de supposer que tous les actifs possèdent la même espérance de rentabilité, ce qui est en contradiction avec nos hypothèses (absence d'actifs redondants).

Annexe 8 :

Si les taux de rentabilités présentent une relation statistique polynomiale d'ordre 3 avec le rendement du portefeuille de marché, les mesures de risque systématique du MEDAF à quatre moments peuvent être obtenues à partir d'une combinaison linéaire des paramètres du modèle de marché cubique.

Démonstration : considérons le modèle de marché cubique, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_t - R_f\,\mathbf{1} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1\,(R_{mt} - R_f) + \boldsymbol{\alpha}_2\,[R_{mt} - E\,(R_m)]^2 \\ \qquad\qquad\qquad + \boldsymbol{\alpha}_3\,[R_{mt} - E\,(R_m)]^3 + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0} \\ E(\boldsymbol{\varepsilon}_t | R_{mt}) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t | R_{mt}^2) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t | R_{mt}^3) = \mathbf{0} \end{array} \right. \tag{A.8.1.}$$

où : $\mathbf{R}_t$ est le vecteur des rentabilités des actifs risqués de dimension $(N \times 1)$; $\boldsymbol{\alpha}_0$ est le vecteur des ordonnées à l'origine des rentabilités excédentaires des actifs de dimension $(N \times 1)$; $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ et $\boldsymbol{\alpha}_3$ sont , respectivement, les vecteurs de dimension $(N \times 1)$ des sensibilités des rentabilités des actifs avec le rendement, le rendement au carré et le rendement au cube du portefeuille de marché, $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ est le vecteur des résidus des rentabilités des actifs de dimension $(N \times 1)$.

En soustrayant l'équation (A.8.1.) à son espérance mathématique on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_t - \mathbf{E} \;=\; & \boldsymbol{\alpha}_1\,[R_{mt} - E\,(R_m)] \\ & + \boldsymbol{\alpha}_2 \left\{ [R_{mt} - E\,(R_m)]^2 - \sigma^2\,(R_m) \right\} \\ & + \boldsymbol{\alpha}_3 \left\{ [R_{mt} - E\,(R_m)]^3 - m^3\,(R_m) \right\} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \end{aligned} \tag{A.8.2.}$$

En se servant des définitions des mesures de risque relatif $\boldsymbol{\beta}$,$\boldsymbol{\gamma}$ et $\boldsymbol{\delta}$, on trouve le résultat recherché,soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \frac{m^3(R_m)}{\sigma^2(R_m)} + \boldsymbol{\alpha}_3 \frac{\square^4(R_m)}{\sigma^2(R_m)} \\ \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \frac{\square^4(R_m) - \left[\sigma^2(R_m)\right]^2}{m^3(R_m)} + \boldsymbol{\alpha}_3 \frac{\xi^5(R_m) - \sigma^2(R_m)\, m^3(R_m)}{m^3(R_m)} \\ \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \frac{\xi^5(R_m) - \sigma^2(R_m) m^3(R_m)}{\square^4(R_m)} + \boldsymbol{\alpha}_3 \frac{\zeta^6(R_m) - \left[m^3(R_m)\right]^2}{\square^4(R_m)} \end{array} \right. \tag{A.8.3.}$$

Annexe 9 :

Lorsque les taux de rentabilités des actifs sont conformes au modèle de marché cubique et les hypothèses classiques du MEA sont satisfaites, les espérances de rentabilité des portefeuilles bien diversifiés, $E\,(R_2)$ et $E\,(R_3)$, respectivement parfaitement corrélés avec la composante orthogonalisée du rendement au carré, ν_{mt}^2, et au cube, ν_{mt}^3, du portefeuille de marché, doivent vérifiées le système d'inégalité suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} E\,(R_2) < E\left(\nu_m^2\right) \\ E\,(R_2) < E\left(\nu_m^3\right) \end{array} \right. \tag{A.9.1.}$$

Démonstration : considérons deux portefeuilles d'arbitrage (de coûts nuls) bien diversifiés notés p et q, avec $\alpha^*_{1p} = \alpha^*_{1q} = 0$, $\alpha^*_{2p} = 1$, $\alpha^*_{2q} = 0$, $\alpha^*_{3p} = 0$ et $\alpha^*_{3q} = 1$. En appliquant la relation du MEA, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(R_p) = E(R_2) \\ E(R_q) = E(R_3) \end{array} \right. \tag{A.9.2}$$

Du fait de la corrélation parfaite des portefeuilles p et q avec, respectivement, les facteurs $\left(\nu^2_{mt}\right)$ et $\left(\nu^3_{mt}\right)$, il est possible d'exprimer les rentabilités de ces portefeuilles conditionnellement à la rentabilité du portefeuille de marché, comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(R_p | R_{mt}) = \alpha^*_{0p} + \nu^2_{mt} \\ E(R_q | R_{mt}) = \alpha^*_{0q} + \nu^3_{mt} \end{array} \right. \tag{A.9.3.}$$

En prenant l'espérance mathématique de l'expression (A.9.3) on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} E\left[E(R_p | R_{mt})\right] = E(R_p) = \alpha^*_{0p} + E\left(\nu^2_m\right) \\ E\left[E(R_p | R_{mt})\right] = E(R_q) = \alpha^*_{0p} + E\left(\nu^3_m\right) \end{array} \right. \tag{A.9.4.}$$

Soit d'après (A.9.2.) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^*_{0p} = E(R_2) - E\left(\nu^2_m\right) \\ \alpha^*_{0q} = E(R_3) - E\left(\nu^3_m\right) \end{array} \right. \tag{A.9.5.}$$

En substituant ces expressions dans l'équation (A.9.3.), on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(R_p | R_{mt}) = E(R_2) - E\left(\nu^2_m\right) + \nu^2_{mt} \\ E(R_p | R_{mt}) = E(R_3) - E\left(\nu^3_m\right) + \nu^3_{mt} \end{array} \right. \tag{A.9.6.}$$

Lorsque $E(R_2) < E\left(\nu^2_m\right)$ et $E(R_3) < E\left(\nu^3_m\right)$ ne sont pas satisfaites, les rentabilités des portefeuilles d'arbitrage p et q sont toujours positives et aucun équilibre de marché n'est alors possible.